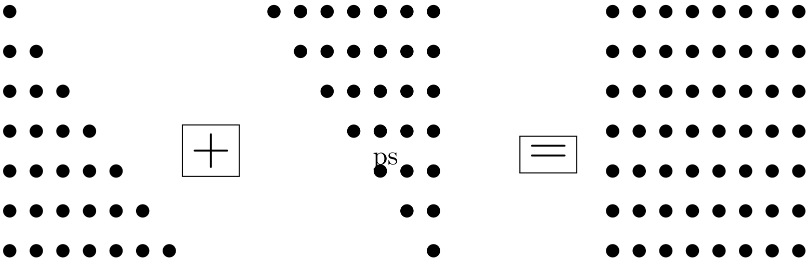
Liczby trójkątne – własności

kolorowe obrazki:
J.H.Conway, R.K.Guy „Księga Liczb”, WNT 2004

Liczby trójkątne – suma

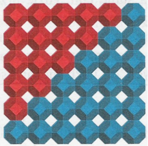


$$\boxed{2\Delta_n = n(n+1) \quad \rightarrow \quad \Delta_n = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

ale przecież $\ldots \Delta_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = S_n$

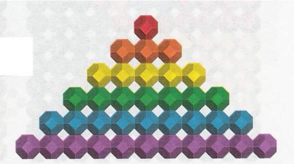
Liczby trójkątne – własności

Suma dwóch kolejnych liczb trójkątnych ...



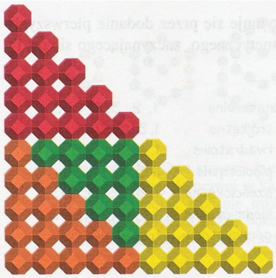
$$\Delta_n + \Delta_{n-1} = n^2$$

$$\begin{aligned} \Delta_n + \Delta_{n-1} = 1 \quad &+ \quad 2 + 3 + \ldots + n \\ &+ \quad 1 + 2 + \ldots + (n-1) \\ = 1 \quad &+ \quad 3 + 5 + \ldots + (2n-1) \end{aligned}$$

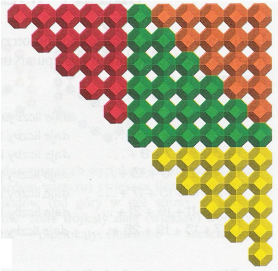


$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 5^2 \\ 1+3+5+7+9+11 &= 6^2 \end{aligned}$$

Liczby trójkątne – własności

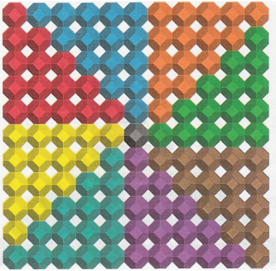


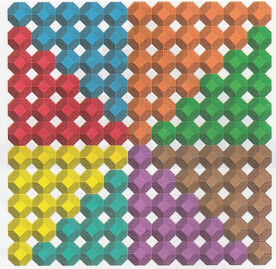
$$3\Delta_n + \Delta_{n-1} = \Delta_{2n}$$



$$3\Delta_n + \Delta_{n+1} = \Delta_{2n+1}$$

Liczby trójkątne – własności





$$(2n+1)^2 = 8\Delta_n + 1$$

$$(2n+1)^2 = 6\Delta_n + \Delta_{n+1} + \Delta_{n-1}$$

Sumy nieparzystych...

mieliśmy ...

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 1^2 \\
1+3 & = & 2^2 \\
1+3+5 & = & 3^2 \\
1+3+5+7 & = & 4^2 \\
1+3+5+7+9 & = & 5^2 \\
1+3+5+7+9+11 & = & 6^2
\end{array}
$$

gdyby dodawać inaczej...

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 1^3 \\
3+5 & = & 2^3 \\
7+9+11 & = & 3^3 \\
13+15+17+19 & = & 4^3 \\
21+23+25+27+29 & = & 5^3 \\
31+33+35+37+39+41 & = & 6^3
\end{array}
$$

Suma pierwszych n sześcianów jest równa sumie pierwszych Δ_n liczb nieparzystych, a ta jak wiemy to Δ_n^2

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \Delta_n^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$