Leonardo Fibonacci
(circa 1170 – circa 1240)

Leonardo Fibonacci (circa 1170 – circa 1240)

to sympatycznie brzmiące nazwisko kryje w sobie łacińskie *filius Bonacci*, czyli syn Bonacciego; z kolei *Bonaccio* możnaby (z grubsza) tłumaczyć jako: poczciwiec.

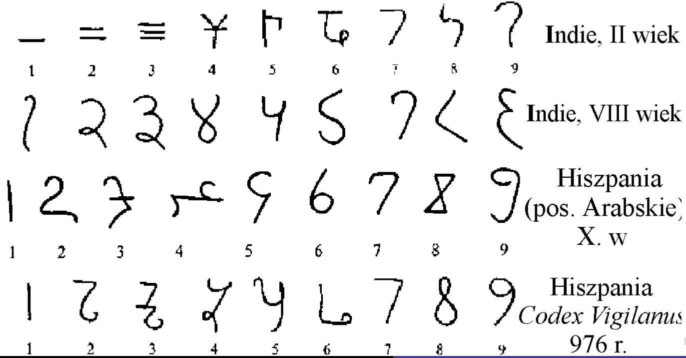
Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Wspominamy o ojcu, bo prawdopodobnie jemu zawdzięczamy pośrednio sukcesy syna. Bonaccio, pizański kupiec, był szefem włoskiej kolonii w północno-afrykańskim porcie Boużia (dziś algierska Beżaja).
Tam Leonardo pobierał pierwsze lekcje matematyki u arabskiego nauczyciela. Widocznie dobrze się sprawował bo dalsze studia zawiodły go w rozliczne miejsca. Były to Egipt, Syria, Prowansja, Grecja i Sycylia – nieźle jak na 12-wiecznego studenta. Po powrocie do Pizy, w 1202 roku, Leonardo napisał swoje głośne dzieło *Liber Abaci* (Księga Rachunków), w której pojawiają się, i to w pierwszym rozdziale, arabskie a raczej hinduskie cyfry.

Ewolucja hindusko–arabskiego systemu dziesiętnego

Ten dla nas tak dzisiaj naturalny system, wędrował do Europy za pośrednictwem Arabów dobre parę setek lat. Ze względu na zróżnicowane formy zapisu poszczególnych cyfr przyjmował się opornie – jeszcze w 1202 roku rada miejska Florencji zabroniła używania arabskich cyfr, nakazując posługiwanie się symbolami rzymskimi lub wypisywanie liczb „słownie”.

Powodem były . . . częste fałszerstwa. Zero można było łatwiutko przerobić na 6 lub 9, a w ogóle taka cyfra która przedstawia sobą „nic” długo nie docierała do świadomości średniowiecznych rachmistrzów. Zasługa No. 1 Fibonacciego to definitywne spopularyzowanie arabskiego systemu numerycznego.



- problem o dwóch ptakach
- o kupcu z Wenecji
- problem o czterech sakiewkach
- zagadkę Jana z Palermo, nadwornego matematyka Fryderyka II na jego sycylijskim dworze.

Dwa ptaki wylatują, w tym samym momencie, ze szczytów dwóch wież, odległych o 50 metrów.
Wysokość jednej wieży to 30 m, a drugiej – 40 m. Lecąc z tą samą prędkością dolatują w tym samym momencie do fontanny, usytuowanej na prostej pomiędzy dwoma wieżami („poziom zero").
W jakiej odległości od podstawy każdej wieży znajduje się fontanna?

Problemy z *Liber Abaci*

- problem o dwóch ptakach
- o kupcu z Wenecji
- problem o czterech sakiewkach
- zagadkę Jana z Palermo, nadwornego matematyka Fryderyka II na jego sycylijskim dworze.

Kupiec podczas swojej podróży handlowej do Wenecji podwoił tam swój początkowy kapitał, a następnie wydał 12 denarów.
Potem udał się do Florencji gdzie znowu podwoił liczbę posiadanych denarów i wydał 12.
Po powrocie do Pizy po raz kolejny podwoił swój majątek, wydał dwanaście denarów i ... został bez grosza.
Ile denarów miał na początku?

Problemy z *Liber Abaci*

- problem o dwóch ptakach
- o kupcu z Wenecji
- problem o czterech sakiewkach
- zagadkę Jana z Palermo, nadwornego matematyka Fryderyka II na jego sycylijskim dworze.

Trzech mężczyzn znalazło sakiewkę zawierającą 23 denary.
Pierwszy powiedział do drugiego: „Jeżeli dodam te pieniądze do swoich to będę miał dwa razy więcej od ciebie”.
Drugi podobnie zwrócił się do trzeciego: „Ja zaś, jeżeli wezmę te pieniądze będę miał trzy razy więcej od ciebie”.
W końcu trzeci powiedział do pierwszego: „Ja dodając te pieniądze do swoich będę miał cztery razy więcej niż ty”. Ile denarów miał każdy z nich?

Problemy z *Liber Abaci*

- problem o dwóch ptakach
- o kupcu z Wenecji
- problem o czterech sakiewkach
- zagadkę Jana z Palermo, nadwornego matematyka Fryderyka II na jego sycylijskim dworze.

Trzech dworzan miało swoje udziały w pewnej kwocie pieniędzy: udział pierwszego wynosił 1/2 , drugiego – 1/3, a trzeciego – 1/6 całości.
Każdy ze współudziałowców pobrał ze wspólnej kasy pieniądze – niezbyt rzetelnie; nie zostało nic.
Następnie pierwszy z nich zwrócił połowę tego co zabrał, drugi – jedna trzecią, a trzeci – jedną szóstą.
Powstałą kwotę podzielono na trzy równe części i dano po jednej trzem dworzanom.
Okazało się, że każdy z nich miał wówczas dokładnie tyle pieniędzy ile mu przysługiwało.
Ile pieniędzy było w kasie na początku, ile pobrał każdy z nich?

Problemy z *Liber Abaci*, c.d.

Problem No.4 (3 dworzanie): *W ówczesnych czasach matematycy nie zawsze zdawali sobie sprawę z tego, że dany problem może mieć nieskończenie wiele rozwiązań.*
Chodzi o znalezienie (chociaż) jednego rozwiązania. O ile początkowa liczba pieniędzy jest zapewne liczbą całkowitą, podobnie jak „pobierane" kwoty, to już udziały nie muszą być całkowite.

Tour de force Fibonacciego ...

... to rozwiązanie równania trzeciego stopnia

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Był to jeden z piętnastu problemów, które przedstawiono do rozwiązania Leonardowi na dworze cesarza Fryderyka II.
Leonardo poradził sobie z tym równaniem metodą prób i błędów.

$$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}$$

to w notacji dziesiętnej 1,3688081075.
Naprawdę warto sprawdzić, że jest to przybliżone rozwiązanie jest poprawne do przedostatniego (!) miejsca po przecinku włącznie.

W 1225 Fibonacci . . .

opublikował *Liber quadratorum*, dzieło poświęcone wyłącznie równaniom diofantycznym, ale z niewiadomymi w drugiej potędze. Na przykład układ:

$$\begin{aligned} x^2 + x &= u^2, \\ x^2 - x &= v^2, \end{aligned}$$

Rozwiązania tego układu – w klasie liczb wymiernych – poszukiwał F. rozważając ciąg trzech liczb a^2, b^2, c^2 – kwadratów liczb całkowitych – które tworzą postęp arytmetyczny o różnicy d:

$$a^2 = b^2 - d, \quad b = b, \quad c^2 = b^2 + d. \tag{1}$$

Wystarczy teraz wpaść na to, aby niewiadomą x przedstawić w postaci ułamka (liczba wymierna!) b^2/d; pozostałe kwadraty niewiadomych to

$$u^2 = x^2 + x = \frac{b^4}{d^2} + \frac{b^2}{d} = \frac{b^2(b^2+d)}{d^2} = \frac{b^2c^2}{d^2} = \left(\frac{bc}{d}\right)^2,$$
$$v^2 = x^2 - x = \frac{b^4}{d^2} - \frac{b^2}{d} = \frac{b^2(b^2-d)}{d^2} = \frac{b^2a^2}{d^2} = \left(\frac{ba}{d}\right)^2.$$

Proste. Wystarczy tylko na to wpaść. Najprostsze rozwiązanie diofantyny (1) – jedno z nieskończenie wielu – można uzyskać kładąc $a = 1$ (jak najprostsze, to najprostsze) i poszukując takich b i c, żeby $2b^2 - 1$ było kwadratem całkowitej liczby. Nie trzeba daleko szukać.

Liczby Fibonacciego

To, że nazwisko Fibonacciego weszło do matematyki to zasługa pewnego ciągu liczb, nazwanego (dopiero w XIX w. przez francuskiego matematyka, Edwarda Lucasa) ciągiem Fibonacciego.
Jak zwykle – to nie Leonardo „wymyślił” ten ciąg.
Ale w jego *Liber Abaci* jest taki oto problem:
Pewien gospodarz zamknął w dużej klatce parę królików. Ile par królików będzie w klatce po roku, jeżeli każda para królików co miesiąc rodzi nową parę, a ta staje się „reproduktywna” po upływie miesiąca?

Liczby Fibonacciego – klatka z krolikami

Miesiąc	Pary dorosłe	Pary młode	Całkowita liczba par
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	2	5
4	5	3	8
5	8	5	13
6	13	8	21
7	21	13	34
8	34	21	55
9	55	34	89
10	89	55	144
11	144	89	233
12	233	144	377

Nietrudno zauważyć, że liczba par w kolejnym miesiącu to suma dwóch składników:
(1) liczby par poprzedniego miesiąca,
(2) powiększonej o liczbę par przychówku.
Ta ostatnia liczba jest równa liczbie par sprzed dwóch miesięcy.
Liczby Fibonacciego to

$$\boxed{F_0 = 0, \quad F_1 = F_2 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2.} \tag{2}$$

(Dodanie dwóch jedynek na początku można też interpretować przy pomocy królików: jeżeli para została zamknięta w klatce zaraz po urodzeniu to po miesiącu w klatce ciągle była tylko ta jedna parka. Zero – no cóż, od czegoś trzeba zacząć)