Liczby Fibonacciego

Liczby Fibonacciego – rekurencje i własności

Liczby Fibonacciego są przykładem ciągu rekurencyjnego liczb całkowitych, który posiada cały szereg zaskakujących własności. Na przykład:

1. Dwie *kolejne* liczby F. nie mają wspólnego podzielnika (z wyjątkiem trywialnego 1).
2. Dla dowolnej liczby pierwszej p mamy *nieskończenie wiele* liczb F, które są podzielne przez p, i które są rozmieszczone w równych odstępach w ciągu.
   Każdy „co czwarty” wyraz ciągu jest na przykład podzielny przez 3, co piąty – przez 5, co ósmy przez 7, itd.
3. Liczby spełniają relację

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{1}$$

ad 1 Dowód metodą nie wprost: F_{n+1}, F_n są podzielne przez pewne d. Z wzoru definicyjnego wynika, że F_{n-1} będzie też podzielne przez d.
Ale w takim razie F_{n-2} też (stosujemy rekurencję do trójki o indeksach $n, n-1, n-2$), podobnie jak $F_{n-3}, F_{n-4}, \ldots$.
Cofając się n kroków wstecz dostajemy, że $F_1 = 1$ też jest podzielne przez d. $\square$

ad 3 Dowód znowu jest oparty na podstawowej rekurencji

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-1}F_{n+1}$$
$$= (F_n - F_{n+1})F_{n-1} + F_nF_{n-2} = (-1)(F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2}).$$

Obniżyliśmy wartości wszystkich wskaźników o jedynkę. Postępując tak $n-2$ razy dostaniemy

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-2}(F_2^2 - F_3F_1) = (-1)^{n-1}.$$

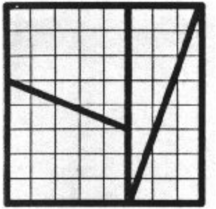
$\square$

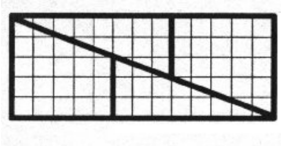
paradoks Cassiniego

Ostatnia relacja, opublikowana po raz pierwszy w 1650r. (Kepler znał ją 50 lat wcześniej!) przez Jean Dominique Cassiniego przy podstawieniu $n = 2k$ staje się podstawą , ulubionej ponoć łamigłówki Lewisa Carolla („Alicja w krainie czarów”).

$$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1.$$

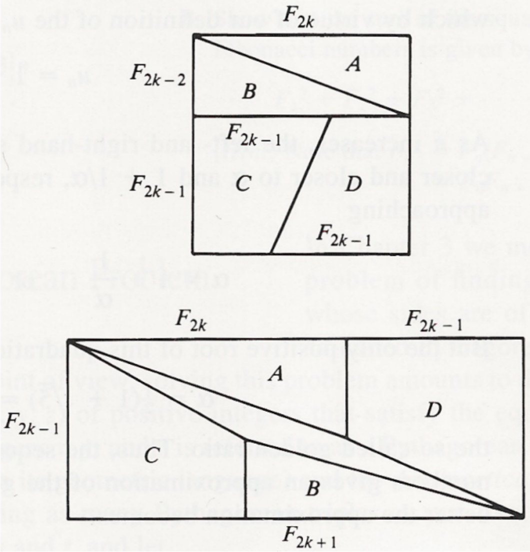
Dzielimy szachownicę na cztery części i układamy z niej prostokąt.





Wystarczy by bok kwadratu był liczbą Fibonacciego, aby posklejany z niego kawałków prostokąt miał pole o jednostkę większą lub mniejszą. Nie słyszałeś pewno nigdy o prawie zachowania powierzchni, ale tak na zdrowy rozum to powinno takie prawo istnieć. Czyżby liczby F nie musiały mu się podporządkowywać?

„paradoks" Cassiniego



...*system liczbowy.*

Każda liczba całkowita może być przedstawiona jako suma liczb Fibonaciego.

Każda!

Jeden milion w reprezentacji Fibonacciego wygląda o tak:

$$\begin{array}{rcccccc} 1\,000\,000 & = & 83\,2040\,+ & 121\,393\,+ & 46\,368\,+ & 144\,+ & 55 \\ & = & F_{30}\,+ & F_{26}\,+ & F_{24}\,+ & F_{12}\,+ & F_{10} \\ & = & & & \multicolumn{3}{r}{(1000101000000000000101000000000)_F} \end{array}$$

Te zera i jedynki to – oczywiście – brak (0) albo obecność (1) liczby o danym wskaźniku; zaczynamy od prawej strony – najbardziej skrajne zero odpowiada F_1.

Liczby Fibonacciego ...

...mają swoją funkcję tworzącą. Istnieje szereg potęgowy F_z:

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

Rekurencja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$,pozwala nam ten szereg znaleźć natychmiast. Mnożąc powyższy szereg przez z i z^2 mamy

$$\begin{aligned}
F(z) &= F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + F_4 z^4 + \ldots \\
zF(z) &= F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + F_3 z^4 + \ldots \\
z^2 F(z) &= F_0 z^2 + F_1 z^3 + F_2 z^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Po odjęciu: $F_0 + (F_1 - F_0)z = z \ (F_0 = 0)$.

(2) $$F(z) - zF(z) - z^2 F(z) = z,$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

Ten zgrabny wzór staje się jeszcze zgrabniejszy jeżeli rozbić go na ułamki proste.

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\Phi z} - \frac{1}{1-\hat{\Phi} z} \right). \tag{3}$$

Φ i Φ z daszkiem to ważne stałe.
Liczba $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,61803$ to słynny złoty stosunek, znany jeszcze starożytnym artystom. (Dlatego „Fi” jak Fidiasz).
Fi z daszkiem to $\hat{\Phi} = (1-\sqrt{5})/2 = -1/\Phi \approx -0,61803$.

Postać funkcji tworzącej

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\Phi z} - \frac{1}{1-\hat{\Phi} z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$$

pozwala nam określić liczby F jako

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \hat{\Phi}^n\right).$$

Dla dużych n przyczynek od $\hat{\Phi}^n$ staje się zaniedbywalnie mały i F_n staje się praktycznie równe n-tej potędze złotego stosunku podzielonej przez $\sqrt{5}$. A jeżeli tak to iloraz dwóch kolejnych liczb F staje się z coraz lepszy przybliżeniem równy Φ!

Liczby Fibonacciego i złoty podział, c.d

sprawdźmy:

$$\text{zdefiniujmy:} \qquad f_n \equiv \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

$$f_1 = \tfrac{1}{1} = 1 \qquad f_2 = \tfrac{2}{1} = 2$$
$$f_3 = \tfrac{3}{2} = 1.5 \qquad f_4 = \tfrac{5}{3} = 1,66\ldots$$
$$f_5 = \tfrac{8}{5} = 1,6 \qquad f_6 = \tfrac{13}{8} = 1,625$$
$$f_7 = \tfrac{21}{13} = 1,615\ldots \qquad f_8 = \tfrac{34}{21} = 1,619\ldots$$

$$f_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{f_{n-1}}.$$

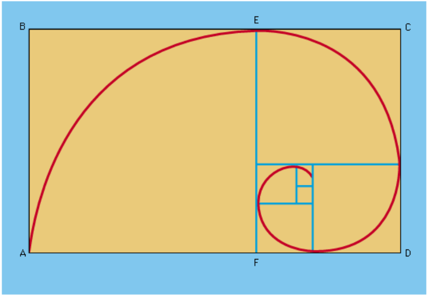
Dla $n \to \infty$ mamy $f_n,\ f_{n-1} \ \to \ \alpha$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \qquad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,$$

z pierwiastkiem (> 0 !) $\alpha \equiv \Phi = 1,618033989\ldots.$

Liczby Fibonacciego i złoty podział – koniec

Także Fibonacciemu przypisuje się konstrukcję ładnie ilustrującą złoty podział.



Prostokąt ABCD jest zbudowany ze "złotych odcinków". Wycinając z niego kwadrat ABEF zbudowany na krótszym boku dostajemy kolejny złoty prostokąt ECDF (bokiem krótszym "do góry").
I tak dalej. Łącząc wierzchołki kolejnych kwadratów dostajemy spiralę Fibonacciego. Dwa najmniejsze czworokąty to – praktycznie – takie same, „jednostkowe" kwadraty. Ten następny to kwadrat o boku 2, kolejny kwadrat ma bok równy 3, kolejny – 5...