Podzielność liczb – pierwsze kroki

Parzystość, nieparzystość. . .

Liczby są *parzyste* $n_{prz} = 2k$, albo *nieparzyste* $n_{nprz} = 2k + 1$.

$$n_{prz}^2 = 4k^2, \quad n_{nprz}^2 = 4k^2 + 4k + 1 \qquad \rightarrow \qquad \ldots$$

. . . reszta z dzielenia przez 4 kwadratu dowolnej liczby = 0 lub 1.

najbliższa reszta

$$a = k \cdot b + s, \quad -b/2 \leqslant s \leqslant b/2$$

albo (konwencja) $a = -b/2 < s \leqslant b/2$.

To wygodne do *reprezentacji liczb*; na przykład

$3k, \quad 3k \pm 1, \qquad\qquad 3(klasy)$

$5k, \quad 5k \pm 1, \quad 5k \pm 2 \quad 5(klas)$

$4k, \quad 4k + 2, \quad 4k \pm 1 \quad 4(klasy)$

$m_{nprz} = 4k \pm 1 \quad \rightarrow \quad m^2 = 8k(2k \pm 1) + 1.$

Wniosek: kwadrat liczby nieparzystej ma postać $8q + 1$.

ostatnia cyfra kwadratu

$$\forall n, \quad n = 10a + b, \quad 0 \leqslant b \leqslant 9; \quad \rightarrow \quad n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

wniosek: ostatnią cyfrą liczby będącej kwadratem dowolnej liczby może być: $0, 1, 4, 5, 6, 9$

ostatnie dwie cyfry kwadratu

Łatwo sprawdzić (wystarczy dla liczb 1 — 24 – dlaczego?)

00	21	41	64	89
01	24	44	69	96
04	25	49	76	
09	29	56	81	
16	36	61	84	

kilka prościutkich zadań:

- Wykaż, że jeżeli $2 \nmid n$ i $3 \nmid n$ to $n^2 = 12q + 1$.
- Wykaż, że jeżeli $5 \nmid n$ to $n^4 = 5q + 1$.
- Wykaż, że ostatnia cyfra piątej potęgi dowolnej liczby (zapisanej w systemie dziesiętnym) jest taka sama jak ostatnia cyfra tej liczby.
- Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą to $24 \mid n(n^2 - 1)$.

System binarny (dwójkowy)

Problem: $87 \cdot 59$=?

$$\begin{aligned}
87 &= 43 \cdot 2 + 1 \\
43 &= 21 \cdot 2 + 1 \\
21 &= 10 \cdot 2 + 1 \\
10 &= 5 \cdot 2 + 0 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
87 & 59 \\
43 & 118 \\
21 & 236 \\
\cancel{10} & \cancel{472} \\
5 & 944 \\
\cancel{2} & \cancel{1888} \\
1 & 3776 \\
\hline
 & 5133
\end{array}$$

$87 = [1, 0, 1, 0, 1, 1, 1]_2$

$$87 \cdot 59 = [2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^6] \cdot 59 = 5133$$