Podzielność liczb;
iloczyn i suma dzielników

Liczba dzielników

Postać (rozkład) kanoniczna każdej liczby

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}\, p_r^{\alpha_r}.$$

Każdy dzielnik d naszej liczby ma swojego „partnera” d_1: $N = d \cdot d_1$.

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_{r-1}^{\delta_{r-1}}\, p_r^{\delta_r}; \qquad 0 \leqslant \delta_i \leqslant \alpha_i.$$

$$d_1 = p_1^{\alpha_1-\delta_1} p_2^{\alpha_2-\delta_2} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}-\delta_{r-1}}\, p_r^{\alpha_r-\delta_r}.$$

Tak więc każde δ_i ma $\alpha_i + 1$ wartości: $0, 1, \dots, \alpha_i$. A stąd wynika, że *liczba dzielników* liczby N, $\tau(N)$ jest równa

$$\tau(N) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_r + 1).$$

Na przykład: $\tau(60) = \dots\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad \rightarrow \quad \tau(60) = 3 \cdot 2 \cdot 2.$

Iloczyn dzielników

Wypisując równość $N = d \cdot d_1$ dla *wszystkich* $\tau(N)$ możliwych wartości d i d_1

$$\begin{aligned} N &= d^{(1)} \cdot d_1^{(1)}, \\ N &= d^{(2)} \cdot d_1^{(2)}, \\ \ldots & \quad \ldots \\ N &= d^{(\tau(N))} \cdot d_1^{(\tau(N))}, \end{aligned}$$

i wymnażając stronami

$$N^{\tau(N)} = \prod_{i \leqslant \tau(N)} d^{(i)} \prod_{i \leqslant \tau(N)} d_1^{(i)} = \left(\prod_{i \leqslant \tau(N)} d^{(i)} \right)^2.$$

$$\prod_{i \leqslant \tau(N)} d^{(i)} = \left(\sqrt{N}\right)^{\tau(N)}, \quad \text{albo}$$

$$\sqrt[\tau(N)]{d^{(1)} d^{(2)} \ldots d^{(\tau(N))}} = \sqrt{N}.$$

Średnia geometryczna wszystkich możliwych dzielników danej liczby N jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z tej liczby.

Suma dzielników

Niech

$$N = a \cdot b; \qquad a \perp b.$$

Jeżeli $d \mid N \quad \to d = a_i b_i, \quad$ gdzie $\quad a_i \mid a, \;\; b_i \mid b.$
Zapiszmy dzielniki a jako liczby: $1, a_1, a_2, \ldots, a;$
podobnie mamy dzielniki b jako liczby: $1, b_1, b_2, \ldots, b.$ Oznaczmy:
$\sigma(a) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a$; analogicznie $\sigma(b) = 1 + b_1 + b_2 + \ldots + b.$
dla określonego a_i suma dzielników N będzie równa
$a_i(1 + b_1 + \ldots + b)$; sumując po wszystkich a_i otrzymujemy wzór na sumę wszystkich możliwych dzielników N:

$$(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a)(1 + b_1 + b_2 + \ldots + b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b);$$

$$\boxed{\sigma(N) = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b).}$$

Dzielniki a i b rozbijamy (o ile można) na bardziej elementarne; widać, że taka procedura prowadzi do

$$\boxed{\sigma(N) = \sigma(p_1^{\delta_1})\sigma(p_2^{\delta_2}) \ldots \sigma(p_{r-1}^{\delta_{r-1}})\, \sigma(p_r^{\delta_r}).}$$

Suma dzielników

Jakie (i ile) są dzielniki p^α? $1, p, p^2, \ldots, p^{\alpha-1}, p^\alpha$. Ich suma

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \ldots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$

A w takim razie

$$\sigma(N) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^{\alpha_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

W szczególności $\boxed{\sigma(p) = \frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1;}$ $\boxed{\sigma(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2 - 1}.}$

Możemy wprowadzić pojęcie *średniego dzielnika liczby* N

$A(N) = \dfrac{\sigma(N)}{\tau(N)}$.

Na przykład: $\sigma(60) = \sigma(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2^3 - 1)(3 + 1)(5 + 1) = 168$;
$A(60) = 168/12 = 14$.

Suma dzielników – średnia harmoniczna

Mieliśmy $N = d^i \cdot d_1^i$; $\qquad \dfrac{1}{d^i} = \dfrac{d_1^i}{N}$.

Sumując obie strony po wszystkich możliwych dzielnikach d^i i ich partnerach d_1^i

$$\sum_i \frac{1}{d^i} = \frac{1}{N} \sum_i d_1^i = \frac{1}{N} \sum_i d^i = \frac{\sigma(N)}{N}.$$

Wprowadzając pojęcie *średniej harmonicznej*

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right)$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{\tau(N)} \sum_i \frac{1}{d^i} = \frac{1}{H(N)} = \frac{\sigma(N)}{\tau(N)\, N} = \frac{A(N)}{N} \quad \text{albo}$$

$N = A(N) \cdot H(N)$, skąd (średnia arytmetyczna jest większa od harmonicznej) $A(N) \geqslant \sqrt{N} \geqslant H(N)$.

Na przykład: $H(60) = N/A(N) = 60/14$.

Liczby doskonałe

Zgodnie z uprawianą od niepamiętnych czasów „magią liczb” – liczba doskonała to taka liczba, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników, za wyjątkiem dzielnika będącego tą właśnie liczbą.
Wygodnie jest zdefiniować taką „okrojoną” sumę dzielników jako
$\sigma_0(N) = \sigma(N) - N$
— dla liczby doskonałej P mamy: $\sigma_0 = P$,
albo $\sigma = 2P$.

takimi liczbami są 6, 28, 496, 8 128...

twierdzenie Euklidesa-Eulera

Liczba w postaci $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$ jest liczbą doskonałą, jeżeli drugi czynnik $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą Mersenne'a.

(Ten wzór znał już Euklides, ale wykazał go dopiero Euler.)

Zapiszmy $P = 2^{p-1} \cdot q$, gdzie q jest pewną liczbą nieparzystą. Oba czynniki są względnie pierwsze – tak więc

$$\sigma(P) = \sigma(2^{p-1}) \cdot \sigma(q) = (2^p - 1) \cdot \sigma(q) = \ldots$$

z warunku „doskonałości" $\ldots = 2P = 2^p \cdot q$. Używając sumy dzielników σ_0 mamy

$$(2^p - 1) \cdot [\sigma_0(q) + q] = 2^p \cdot q, \quad \rightarrow \quad \boxed{q = (2^p - 1)\sigma_0(q)}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że:
1) $\sigma_0(q)$ jest dzielnikiem q – nazwijmy go d, ale...
2)$\sigma_0(q)$ jest sumą *wszystkich* dzielników q, łącznie z d. A jeżeli tak, to ... d *musi* być równe 1, jest to *jedyny* dzielnik mniejszy od q, a więc rzeczywiście $q = 2^p - 1$ i jest liczbą pierwszą. □
Tak więc każda liczba pierwsza Mersenne'a generuje liczbę doskonałą. I tak na początku 19. wieku Barlow w swojej *Number Theory* (Londyn, 1811) podaje największa liczbę doskonałą P_{31}, określoną przez liczbę Mersenne'a P_{31}. Dzisiaj (wrzesień 2008) znamy 46 liczb Mersenne'a i 46 liczb doskonałych.

Wszystkie znane liczby doskonałe są (jak wynika z ich definicyjnego wzoru) *parzyste*. Nikt jeszcze nie znalazł doskonałej liczby nieparzystej ale i nikt nie udowodnił, że taka liczba nie może istnieć!

Dla liczb nie doskonałych mamy dwie możliwości:
$\sigma_0(N) < N, \quad \sigma_0(N) > N$. Pierwsze liczby nazywamy niedomiarowymi, drugie – nadmiarowymi.

W ramach rozważań z historii teorii liczb — nauczyciel doradca Karola Wielkiego, słynny Alkuin (angielski benedyktyn, jeden z pierwszych reformatorów, a właściwie twórców szkolnictwa) usprawiedliwiał niedoskonałość rodu ludzkiego faktem, że po potopie cała ludzkość to potomkowie 8 osób uratowanych w arce, a 8 to liczba niedomiarowa…Co innego, pierwsza (rajska) kreacja, która bazowała na liczbie doskonałej 6…

Liczb nadmiarowych (np. 12, 18, 20, 24, 30, 36...) nie jest wiele, ale pośród nich mogą się zdarzyć takie, których suma dzielników (z pominięciem samej liczby) jest równa wielokrotności liczby. Taką liczbą jest np 120: $\sigma_0(120) = 240$. Jeżeli ogólnie

$$\sigma_0(N) = k \cdot N \quad \text{to liczbę} \quad N \to P_k,$$

nazywamy liczbą doskonałą klasy k
(zwykłe liczby doskonałej należą więc do klasy pierwszej).
Takich liczb poszukiwali Mersenne, Fermat i wielki Kartezjusz.
Na przykład Fermat odkrył drugą liczbę P_2 – 672, dla której $\sigma_0(672) = 2 \cdot 672$. Dzisiaj takich liczb znamy ponad dwa tysiące o krotności k sięgającej 8. Największa taka liczba to $\ldots 7.3 \times 10^{1345}$.
Dla ciekawych podaję adres strony www o takich liczbach.

zadanie

udowodnij, że ostatnią cyfrą liczby doskonałej $P = 2^{p-1}(2^p - 1)$ musi być 6 lub 8. Wskazówka: Zapisz $p = 4k \pm 1$.

Liczby zaprzyjaźnione...

...to pary liczb N i M, dla których
$\sigma_0(N) = M \qquad \text{oraz} \qquad \sigma_0(M) = N.$
Na przykład taką parą jest 220 i 284.

Liczby te były już (podobno!) przedmiotem zainteresowań Pitagorejczyków, a także (z pewnością) arabskich matematyków; już w 9. wieku Thabit ibn Qurra podał algorytm wyszukiwania zaprzyjaźnionych par:

1. Dla kolejnych wartości n obliczamy $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$:

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	5	11	23	47	95	181	383

2. Jeżeli p_{n-1} i p_n są obie liczbami pierwszymi to obliczamy $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$; jeżeli q_n okaże się też liczbą pierwszą to para $M = 2^n p_{n-1} p_n$ oraz $N = 2^n q_n$ jest zaprzyjaźniona.
3. dowód polega na wykazaniu że $\sigma(N) = \sigma(M) = M + N$ – bardzo łatwy.