Liczby pierwsze — rozmieszczenie

Rozmieszczenie liczb pierwszych

Wprowadzamy funkcję $\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \leqslant x} 1$, — liczbę liczb pierwszych nie przekraczających x. Łatwo sprawdzić:
$\pi(12) = 5\ (2, 3, 5, 7, 11); \quad \pi(17) = 7\ (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17)$.

Jeszcze wielki Gauss zaproponował dwie formuły (przybliżone) dla funkcji $\pi(x)$, obie zresztą na podstawie wniosków z numerycznych obliczeń (bez dowodu).

Pierwsza z nich to tzw. *Prime Number Theorem – PNT*, sformułowany ok. 1800 roku, nad dowodem którego biedzili się Wielcy Matematycy: Legendre, Czebyszew, Sylvester, Riemann, a które udowodnili (niezależnie) z końcem 19. wieku Hadamard i de la Valée-Poussin (1896).

To absolutnie fundamentalne twierdzenie mówi, że funkcja $\pi(x)$ jest asymptotycznie równoważna funkcji $x/\ln x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} = 1.$$

Rozmieszczenie liczb pierwszych, c.d.

Drugi pomysł Gaussa (sformułowany w r. 1792 – przez 15-letniego G.) polegał na aproksymacji funkcji $\pi(x)$ tzw. całką logarytmiczną $\mathrm{Li}(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1.$$

Sama funkcja $\mathrm{Li}(x)$ to wartość główna całki

$$\mathrm{Li}(x) = P.V. \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

W użyciu jest też nieco inna (prostsza) definicja

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t};$$

Obie funkcje różnią się o $\mathrm{Li}(2) = 1,0451\ldots$, co – przy olbrzymich wartościach x jakie nas naprawdę interesują nie ma znaczenia.

Dla $x \leqslant 10^6$ przybliżenie $\pi(x)$ przez $\mathrm{Li}(x)$ jest nie do końca satysfakcjonujące – względne różnice (zwłaszcza dla małych x) sięgają kilku procent. Ale dla x większych przybliżenie staje się znakomite; np. dla $x = 10^{20}$ względna różnica to 10^{-10}.

Rozmieszczenie liczb pierwszych – funkcja Riemanna

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}\left(x^{1/n}\right),$$

gdzie $\mu(n)$ to funkcja Moebiusa $(0, \pm 1)$.

n	$\lfloor R(10^n) \rfloor$	$\lfloor R(10^n) \rfloor - \pi(10^n)$
1	5	1
2	26	1
3	168	0
4	1227	−2
5	9587	−5
6	78527	29
7	664667	88
8	5761552	97
9	50847455	−79
10	455050683	−1828
11	4118052495	−2318
12	37607910542	−1476

Tw. Lejeune-Dirichlet'a

rozpatrzmy ciąg liczb pierwszych:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31,\ \ldots$$

Czy taki ciąg $p = 4n - 1$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych? Odpowiedź (twierdzącą, oczywiście!) na to pytanie da nam schemat Euklidesa:

założmy, że taki ciąg jest *skończony* i składa się z liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots p_k$
Utwórzmy $N = 4p_1p_2 \ldots p_k - 1 = 4P - 1$.
Taka liczba nie będzie podzielna przez żadne z p_i; albo jest pierwsza, albo ma dzielniki pierwsze typu $4n \pm 1$; przynajmniej jeden z nich musi być z minusem (bo iloczyn $4n + 1$ i $4m + 1$ też jest postaci $4k + 1$ – a mamy $4P - 1$) i jest większy od p_k. □
Analogiczny dowód możemy przeprowadzić dla postępu arytmetycznego typu $6n - 1$; uogólniając mamy …

… twierdzenie Lejeune-Dirichleta

Każdy postęp arytmetyczny typu $an + b$; $\quad a \perp b, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$ zawiera w sobie nieskończenie wiele liczb pierwszych.

... twierdzenie o wielomianie

Żaden wielomian o współczynnikach całkowitych

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{r-1} x^{r-1} + a_r x^r$$

nie może przyjmować wartości będących wyłącznie liczbami pierwszymi, dla dowolnych wartości zmiennej x.

przypuśćmy, że dla $x = n$ mamy $f(n) = p$. $n \to n + tp$. Policzmy

$$f(n+tp) - f(n) = a_r \left[(n+tp)^r - n^r\right] + a_{r-1}\left[(n+tp)^{r-1} - n^{r-1}\right] + \ldots$$
$$\cdots + a_2\left[(n+tp)^2 - n^2\right] + a_1\left[(n+tp) - n\right].$$

Nasz ulubiony wzór na potęgę dwumianu pozwala nam stwierdzić, że prawa strona tej równości jest podzielna przez p; oczywiście $p \mid f(n)$; a więc $p \mid f(n+tp)$.
Oznacza to, że $f(n+tp)$ jest liczbą złożoną
(chyba, że $f(n+tp) = \pm p$, albo $f(n+tp) = 0$,
ale ... wielomian stopnia r może przyjąć tą samą wartość tylko r razy, a na wartość t mamy nieskończenie wiele możliwości! $\square$

Bywają jednak ciekawe wielomiany! Na przykład wielomian

$$f(x) = x^2 - x + 41$$

generuje liczby pierwsze dla *wszystkich* x większych od lub równych zeru, a mniejszych od (oczywiste) 41.

a wielomian

$$f(x) = x^2 - 79x + 1601$$

generuje liczby pierwsze dla *wszystkich* x większych od lub równych zeru, a mniejszych od 80.

W 1742 roku Christian Goldbach, pochodzący z Królewca niemiecki matematyk, znany (głównie) ze swojej wieloletniej korespondencji z Eulerem, „postawił” hipotezę, funkcjonująca od tego czasu w teorii liczb pod nazwą ...

... hipotezy Goldbacha

1. Każda liczba parzysta, większa od 4, może być przedstawiona w postaci sumy dwóch nieparzystych liczb pierwszych.
2. Każda liczba nieparzysta, większa od 7, może być przedstawiona w postaci sumy trzech nieparzystych liczb pierwszych.

Dzisiaj hipotezę (jasne jest, że z jej pierwszej części – zwanej zwykle „hipotezą Goldbacha” – powinna wynikać druga, zwana „małą hipotezą G.”) formułuje się nieco „silniej”:

... silne hipotezy Goldbacha

1. Każda liczba parzysta, większa od 6, może być przedstawiona w postaci sumy dwóch różnych liczb pierwszych nieparzystych.
2. Każda liczba nieparzysta, większa od 17, może być przedstawiona w postaci sumy trzech różnych liczb pierwszych nieparzystych.

Z hipotezy Goldbacha wynika ...

twierdzenie Czebyszewa

Dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ *pomiędzy* n *a* $2n$ *leży co najmniej jedna liczba pierwsza*

Rzeczywiście: liczba $2n + 2$ jest większa od 4 i zgodnie z hipotezą Goldbacha $2n + 2 = p + q$.
Porządkujemy: $3 \leqslant p \leqslant q$. Stąd: $q < 2n$
i jednocześnie ... $2n + 2 \leqslant 2q \quad \rightarrow \quad q > n$.
Znaleźliśmy więc liczbę pierwszą pomiędzy n a $2n$. $\square$

Po 265 latach hipoteza Goldbacha … pozostaje hipotezą.
Owszem, odniesiono parę sukcesów: Winogradow (1937) udowodnił, że każda dostatecznie duża liczba naturalna może być przedstawiona w postaci sumy trzech różnych liczb pierwszych.

a jeszcze wcześnie wspaniały duet angielskich matematyków Hardy i Littlewood (wspomagani przez genialnego Ramanujana) udowodnili mniej więcej to samo, ale w oparciu o …inną hipotezę (Riemanna, dotyczącą zer zespolonych funkcji dzeta).

Dzisiaj, najlepszy wynik w tym festwialu hipotez należy do chińskiego specjalisty Chena (1933-1996):
każda dostatecznie duża liczba naturalna parzysta może być przedstawiona w postaci sumy liczby pierwszej i liczby będącej iloczynem co najwyżej dwóch liczb pierwszych.

Funkcja dzeta Riemanna

Jest to funkcja określona wzorem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dla $s = 1$ szereg jest rozbieżny; $\zeta(2) = \pi^2/6$ (tę dręczącą od stuleci matematyków sumę policzył brawurowo Euler); $\zeta(4) = \pi^4/90$ i ogólnie

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n} \pi^{2n}}{2n!};$$

gdzie B_{2n} to liczby Bernoulliego. Dzeta Riemanna jest *w zasadzie* funkcją zmiennej zespolonej: $s = \sigma + i\tau$. Jej związek z liczbami pierwszymi wynika z wzoru zwanego iloczynem Eulera; dla części rzeczywistej argumentu $\sigma > 1$ mamy

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$