Problemy diofantyczne – wprowadzenie

Wiek Diophantusa

his boyhood lasted 1/6th of his life; he married after 1/7th more;
his beard grew after 1/12th more, and his son was born 5 years later;
the son lived to half his father's age,
and the father died 4 years after the son.

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{12}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x, \quad x = 84.$$

Chłopiec – 14 lat, mąż – 26; syn umarł w wieku 42 lat, ...

- *Arithmetica* ...pierwszy podręcznik algebry. Tylko sześć z 13 (pierwotnie) ksiąg zachowało się ...
- *Notacja algebraiczna*
  niewiadoma ρ; kwadrat niewiadomej Δ^T sześcian niewiadomej K^T;

$$K^T \lambda\epsilon = 35x^3.$$

  $x^3 - 5x^2 + 8x - 2 \equiv K^T\alpha \quad \rho\eta(-)\Delta^T\epsilon \quad M2 \quad M - monades =$ *jednostki*. Najpierw człony dodatnie; potem (odddzielone specj. symbolem) –ujemne.
- *Równania diofantyczne*

Co to jest równanie diofantyczne?

Problem liczebności stad bydła

Policz liczbę zwierząt w stadach Słońca, które pasły się niegdyś na wyspie Thrinacia.
Były to 4 stada: białe W, w, czarne B, b, żółte Y, y i pstrokate D, d; gdzie duże litery oznaczają byki, a małe – krowy.

liczba białych byków była równa: połowie i trzeciej części byków czarnych plus wszystkie żółte; $W = (1/2 + 1/3)B + Y$
liczba czarnych byków – 1/4-ej i 1/5-ej części byków pstrokatych plus wszystkie żółte; $B = (1/4 + 1/5)D + Y$
byków pstrokatych było 1/6 i 1/7 części byków białych plus wszystkie żółte; $D = (1/6 + 1/7)W + Y$
liczba białych krów była równa: trzeciej i czwartej części *całego* czarnego stada; $w = (1/3 + 1/4)(B + b)$
liczba czarnych krów była równa: czwartej i piątej części *całego* pstrokatego stada; $b = (1/4 + 1/5)(D + d)$
liczba pstrokatych krów była równa: piątej i szóstej części *całego* żółtego stada; $d = (1/5 + 1/6)(Y + y)$
liczba żółtych krów była równa: szóstej i siódmej części *całego* białego stada; $y = (1/6 + 1/7)(W + w)$

Problem liczebności stad bydła, c.d.

innymi słowy:

$$
\begin{aligned}
W &= (1/2+1/3)B+Y \\
B &= (1/4+1/5)D+Y \\
D &= (1/6+1/7)W+Y \\
w &= (1/3+1/4)(B+b) \\
b &= (1/4+1/5)(D+d) \\
d &= (1/5+1/6)(Y+y) \\
y &= (1/6+1/7)(W+w)
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie

Układ (siedmiu!) równań jednorodnych dla (ośmiu !!) niewiadomych W, B, Y, D, w, b, y, d — macierz współczynników:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & -42 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 20 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & -11 & 30 \\ -13 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 42 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W &= 10\,366\,482k \\ B &= 7\,460\,514k \\ Y &= 4\,149\,387k \\ D &= 7\,358\,060k \\ w &= 7\,206\,360k \\ b &= 4\,893\,246k \\ y &= 5\,439\,213k \\ d &= 3\,515\,820k \end{aligned}$$

Rozwiązanie, dla $k = 1$

$W = 10\,366\,482 \quad B = 7\,460\,514 \quad Y = 4\,149\,387 \quad D = 7\,358\,060$
$w = 7\,206\,360 \quad b = 4\,893\,246 \quad y = 5\,439\,213 \quad d = 3\,515\,820$

$$\text{liczba wszystkich sztuk bydła} = 50\,389\,092.$$

. . . ale to zaledwie początek (wysokich) schodów

okazuje się, że . . . są dodatkowe warunki!

1. suma białych i czarnych byków musi być liczbą kwadratową . . .
2. . . . a suma żółtych i pstrokatych byków musi być liczbą trójkątną.

ad.1 $W + B = 10\,366\,482k + 7\,460\,514k = 17\,826\,996k =$
$(2)(2)(3)(11)(29)(4657)k =$ kwadrat pewnej liczby
$k = (3)(11)(29)(4657)r^2 = 4\,456\,749r^2 \quad r-$ dowolna liczba całkowita
ad.2 $Y + D = 4,149,387k + 7,358,060k = \frac{m(m+1)}{2}$.

po prostych zabiegach dostajemy tzw. *równanie Pella*

$$b^2 - 4\,729\,494\,d^2 = 1; \qquad 9314|d.$$

- A. Amthor (1880) — $\sum = 776\ldots$, gdzie kropki to 206 542 nieznanych cyfr!
- A.H. Bell (1882) plus dwóch zapaleńców z *Hillsboro Mathematics Club, Illinois*, po czterech latach (!) obliczeń, podało 32 „lewe" i 12 „prawych" cyfr.
- H.C. Williams, R.A. German, C.R. Zarnke (1965) – komputer. 206 545 cyfr (30 i 12 poprawnych!)
- szacunkowe „wymiary" liczby: 15 cyfr/cal daje jej długość równą przeszło 300 metrów.
  Oczywiście nie tylko Sycylia, ale i cała Ziemia nie pomieściłaby takiej liczby byków i krów. Co gorsza na jedną krowę przypada (średnio) około 1500 byków . . .
- Harry L. Nelson, the Lawrence Livermore National Laboratory (California, USA) — 47stronicowy wydruk z CRAYa1. (10 minut). Pierwsze i ostatnie 50 cyfr:
  77602714064868182695302328332138866642323224059233 . . .
  05994630144292500354883118973723406626719455081800.

Rozwiązanie równania Pella, c.d.

- Vardi "Archimedes' cattle problem" American Mathematical Monthly Volume 105 (04.1998) 305-319. Prosty (??) wzór, na najmniejszą całkowitą liczbę byków i krów

$$\left\lceil \frac{25194541}{184119152}\left[109931986732829734979866232821433543901088049 + 50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{4729494}\right]^{4658}\right\rceil$$

- Antti Nygrén "A simple solution to Archimedes' cattle problem" University of Oulu Linnanmaa, Oulu, Finland Acta Universitatis Ouluensis Scientiae Rerum Naturalium (03.2001)

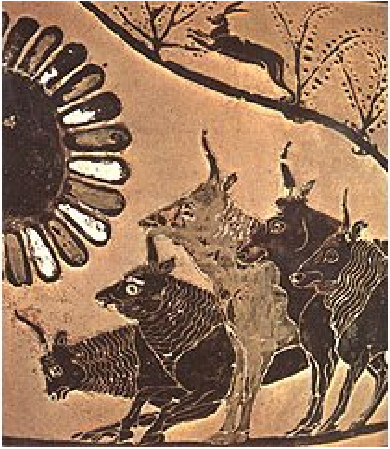
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 109931986732829734979866232821433543901088049 & 392567302329690546856394748066206816187916440 \\ 30784636507697855142356992218944109072681060 & 109931986732829734979866232821433543901088049 \end{bmatrix}^{1164} \begin{bmatrix} 300426607914281713365 \\ 84129507677858393258 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{48222351474}{4657}(uv)^2$$

wzory, pozwalające w kilka sekund porachować T – najmniejszą całkowitą liczbę byków i krów.

Zatem przybędziesz do wyspy Trynakii. Tam pasą się Heliosa liczne krowy i tłuste owce, siedem stad krów i tyleż pięknych trzód owiec, w każdej sztuk pięćdziesiąt…

Trynakia – to dzisiejsza Sycylia. (dosłownie: trójkątna)



Taormina – tam chyba się pasły te stada *(tauros)*