Ułamki łańcuchowe – wprowadzenie

Rrzykład

Rozważmy prosty ułamek $\frac{43}{5}$. Mamy

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{3}{5} = 8 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \boxed{8} + \cfrac{1}{\boxed{1} + \cfrac{1}{\boxed{1} + \cfrac{1}{\boxed{2}}}}.$$

Zauważmy, że powyższe operacje są wierną „kalką" algorytmu Euklidesa, przy znajdowaniu $(43, 5)$:

$$\begin{aligned} 43 &= 8 \cdot 5 + 3, \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2, \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

część całkowita i kolejne wyrazy „wiodące" w mianownikach *ułamka łańcuchowego* to kolejne *dzielniki* q_i w algorytmie.

Liczby wymierne i ułamki łańcuchowe

Ogólnie mamy

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Algorytm Euklidesa $(a > b)$:

$$\begin{array}{rclcl}
a & = & q_0 b + r_1, & & 0 < r_1 < b, \\
b & = & q_1 r_1 + r_2, & & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 & = & q_2 r_2 + r_3, & & 0 < r_3 < r_2, \\
\vdots & \vdots & & & \\
r_{n-3} & = & q_{n-2} r_{n-2} + r_{n-1}, & & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\
r_{n-2} & = & q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & & 0 < r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} & = & q_n r_n + 0. & &
\end{array}$$

możemy też to zapisać w postaci

$$
\begin{array}{r|c|r}
a & & \\
\underline{-bq_0} & q_0 & b \\
r_1 & q_1 & \underline{-r_1q_1} \\
\underline{-r_2q_2} & q_2 & r_2 \\
r_3 & q_3 & \underline{-r_3q_3} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
 & & r_{n-2} \\
r_{n-1} & q_{n-1} & \underline{-r_{n-1}q_{n-1}} \\
\underline{-r_nq_n} & q_n & r_n \\
r_{n+1}=0 & &
\end{array}
$$

Wiodące wyrazy w kolejnych mianownikach ułamka łańcuchowego to ilorazy q_i z algorytmu E. – tzw. *mianowniki częściowe* ułamka łańcuchowego. Stosuje się też zapis

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_n}, \quad \text{albo}$$

$$\frac{a}{b} = [q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n] \quad \text{albo} \quad [q_0; q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n]$$

(średnik umownie oddziela część całkowitą ułamka).

Ułamek łańcuchowy nazywamy *prostym* jeżeli wszystkie $q_i \in \mathbb{N}$.
Ułamek łańcuchowy może być skończony lub nie; jeżeli w jego rozwinięciu zaniedbać wszystkie mianowniki częściowe, począwszy od q_{k+1} to taki ułamek nazywamy *reduktem* ułamka wyjściowego i oznaczamy przez R_k.

Na przykład ułamek $\frac{1281}{243}$ równy

$$\frac{1281}{243} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}} = [5; 3, 1, 2, 7]$$

ma redukty

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 5,\\
R_1 &= 5+\frac{1}{3}=\ldots=\frac{16}{3}\\
R_2 &= 5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}=\ldots=\frac{21}{4},\\
R_3 &= 5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\ldots=\frac{58}{11},\\
R_4 &= 5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7}}}}=\frac{427}{81}
\end{aligned}
$$