Ułamki łańcuchowe i ich redukty

Mieliśmy ułamek $\frac{1281}{243} = \frac{427}{81}$ równy

$$\frac{1281}{243} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}} = [5; 3, 1, 2, 7]$$

z reduktami

$$R_0 = 5, \qquad R_1 = 5 + \frac{1}{3} = \ldots = \frac{16}{3} \qquad R_2 = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}} = \ldots = \frac{21}{4},$$

$$R_3 = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \ldots = \frac{58}{11}, \qquad R_4 = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}} = \frac{427}{81}$$

Takiej *reprezentacji reduktów* też możemy używać jako przedstawienia naszego ułamka:

$$\frac{1281}{243} = \left[\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{21}{4}, \frac{58}{11}, \frac{427}{81}\right].$$

albo ogólnie

$$\frac{a}{b} = [R_0, R_1, \ldots, R_n],$$

gdzie n-ty (ostatni) redukt równy jest $\frac{a}{b}$.

Ćwiczenie:

Sprawdź reprezentację reduktów:

$$\frac{364}{227} = \left[1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{85}{53}, \frac{93}{58}, \frac{364}{227}\right].$$

Twierdzenie:

Każdą liczbę wymierną możemy przedstawić w postaci skończonego, prostego ułamka łańcuchowego. I odwrotnie: każdy skończony, prosty ułamek łańcuchowy reprezentuje liczbę wymierną.

Dowód:

Wystarczy przekształcić algorytm Euklidesa $(a > b)$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_1}{b}, \\
\frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{r_2}{r_1}, \\
\frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{r_3}{r_2}, \\
\vdots \quad &\vdots \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n .
\end{aligned}$$

a następnie podstawiamy sukcesywnie:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = 1 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{r_1/r_2}} = \ldots$$

co prowadzi do wzoru na ułamek łańcuchowy.

Dowód drugiej części twierdzenia:

Metoda indukcji:

1. Ułamek $[q_0, q_1] = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$ jest liczbą wymierną;
2. Założenie indukcyjne – ułamek o k mianownikach częściowych $[q_0, q_1, \ldots, q_k] = \dfrac{r}{s}$ (liczba wymierna);
3. Dowód indukcyjny – ułamek $[q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}] = q_0 + \dfrac{1}{[q_1, \ldots, q_k]} = q_0 + \dfrac{s}{r} = \dfrac{rq_0 + s}{r}$ też jest liczbą wymierną.

uwaga:

Można pokazać, że istnieją dwa rozwinięcia liczby wymiernej na ułamek łańcuchowy; jedno z parzystą, drugie z nieparzystą liczbą mianowników częściowych.

Redukty i ich obliczanie

Pojawiające się redukty mają ogólną postać $R_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$, gdzie mianowniki Q_k i liczniki P_k spełniają relacje rekurencyjne, umożliwiające ich wyliczanie, jeżeli dysponujemy mianownikami częściowymi q_i z algorytmu Euklidesa:

1. $$\begin{aligned} R_0 &= \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}, \\ R_1 &= \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}, \\ \ldots &= \ldots \\ R_k &= \frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}, \quad k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Tak określone liczby P_k i Q_k są liczbami względnie pierwszymi, a więc redukt R_k jest ułamkiem nieskracalnym. (dowód: indukcja).

3. $$P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Można wprowadzić $P_{-1} = 1$ i $Q_{-1} = 0$ aby (1) było słuszne dla $k \geqslant 1$.

Redukty i ich obliczanie

Dowód indukcyjny wzoru (1):

1. z równań wynika, że wzór jest spełniony dla $k = 0, 1$.
2. zakładamy
$$R_m = \frac{P_m}{Q_m} = \frac{q_m P_{m-1} + P_{m-2}}{q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}}.$$
3. $m \to m+1$ a więc $R_m \to R_{m+1}$ i $q_m \to q_m + 1/q_{m+1}$. Mamy

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= \frac{\left(q_m + 1/q_{m+1}\right) P_{m-1} + P_{m-2}}{\left(q_m + 1/q_{m+1}\right) Q_{m-1} + Q_{m-2}} \\ &= \frac{(q_m P_{m-1} + P_{m-2}) q_{m+1} + P_{m-1}}{(q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}) q_{m+1} + Q_{m-1}} \\ &= \frac{P_m q_{m+1} + P_{m-1}}{Q_m q_{m+1} + Q_{m-1}} = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = R_{m+1} \qquad \square. \end{aligned}$$

Redukty i ich obliczanie

Dowód wzoru

$$P_k Q_{k-1} - Q_k P_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Oznaczmy $\Delta_k = P_{k-1}Q_k - P_k Q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Mamy

$$\Delta_1 = P_0 Q_1 - Q_0 P_1 = -1$$

a następnie podstawiając za P_k i Q_k:

$$\begin{aligned}\Delta_k = P_{k-1}(Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}) - Q_{k-1}(P_{k-1}q_k + P_{k-2}) = \\ P_{k-1}Q_{k-2} - Q_{k-1}P_{k-2} = (-1)\Delta_{k-1} \quad \square\end{aligned}$$

Jakie są mianowniki częściowe?

Mamy pewną liczbę x – przedstawiamy ją w postaci ułamka łańcuchowego.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy mianownik częściowy, q_1 jest równy danej liczbie m?

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = q_0 + \{x\} = q_0 + \dfrac{1}{x_1} = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \{x_1\}}.$

Tak więc $q_1 + \{x_1\} = \dfrac{1}{x - q_0}$, albo $q_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x - q_0}. \right\rfloor$

$$m \leqslant \frac{1}{x - q_0} \leqslant m + 1, \quad \text{albo} \quad q_0 + \frac{1}{m+1} \leqslant x \leqslant q_0 + \frac{1}{m}.$$

Dla $x \in (0, 1)$ (wówczas $q_0 = 0$) daje to

$$\frac{1}{m+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{m},$$

a więc x musi należeć do przedziału o długości $1/[m(m+1)]$.
Zwykle q_1 jest niewielką liczbą.

Ułamek łańcuchowy dla liczb Fibonacciego

Fibonacci; problem znalezienia (f_{n+1}, f_{n+2}). Ze wzorów definicyjnych mamy

$$\begin{array}{rcl} f_{n+2} & = & 1 \cdot f_{n+1} + f_n, \\ f_{n+1} & = & 1 \cdot f_n + f_{n-1}, \\ f_n & = & 1 \cdot f_{n-1} + f_{n-2}, \\ \ldots & = & \ldots \\ f_4 & = & 1 \cdot f_3 + f_2, \\ f_3 & = & 2 \cdot f_2. \end{array}$$

Po n krokach dostajemy

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots + \frac{1|}{|1}$$

gdzie symbol $\frac{|}{|}$ pojawia się n razy. (Korzystamy z $2 = 1 + \frac{1}{1}$).