Ułamki łańcuchowe i liczby niewymierne

Wprowadzenie

Niech x będzie liczbą niewymierną; oznaczając $q_0 = \lfloor x \rfloor$ oraz $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ mamy

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = q_0 + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}} = q_0 + \frac{1}{x_1},$$

gdzie $x_1 = 1/(x - q_0)$ będzie liczbą niewymierną, większą od 1 (bo różnica $x - q_0$ jest liczbą niewymierną, mniejszą od 1). Dlatego

$$\frac{1}{x - q_0} = x_1 = \lfloor x_1 \rfloor + \{x_1\} = q_1 + \frac{1}{\frac{1}{\{x_1\}}} = q_1 + \frac{1}{x_2},$$

gdzie $x_2 = 1/\{x_1\} = 1/(x_1 - q_1)$ będzie znowu liczbą niewymierną, większą od 1.

Kontynuując, otrzymujemy ciąg $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ liczb niewymiernych, większych od jedności i ciąg liczb naturalnych $q_n = \lfloor x_n \rfloor$, spełniających:

$$x = q_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{x_n},$$

skąd wynika

$$x = q_0 + \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_{n-1}} + \frac{1|}{|x_n}.$$

Niewymierność x-a została „oddelegowana” do ostatniego mianownika — jasnym jest, że taka procedura może być kontynuowana *usque ad infinitum* (bo nie da się z liczby niewymiernej „zrobić” liczby wymiernej).
Jeżeli w kolejnym, n-tym mianowniku zastąpić $x_n = q_n = \lfloor x_n \rfloor$, to otrzymamy n-ty redukt *nieskończonego* ułamka łańcuchowego, który to ułamek reprezentuje liczbę niewymierną x.

Używając poznanych już relacji rekurencyjnych

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{q_n P_{n-1} + P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}, \quad k \geqslant 1$$

i zastępując w niej q_n przez x_n dostajemy

$$x = \frac{x_n P_{n-1} + P_{n-2}}{x_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

Wzór ten jest słuszny dla dowolnej wartości wskaźnika, np.

$$x = \frac{x_{n+1} P_n + P_{n-1}}{x_{n+1} Q_n + Q_{n-1}},$$

skąd – po wykorzystaniu jeszcze jednego związku dla P_k, Q_k – (1)

$$x - R_n = \frac{x_{n+1} P_n + P_{n-1}}{x_{n+1} Q_n + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{(Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}) Q_n}.$$

Powyższy związek, wraz z oczywistym $x_{n+1} > q_{n+1}$ dają

$$(2) \qquad |x - R_n| < \frac{1}{(Q_n q_{n+1} + Q_{n-1})Q_n} = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Łatwo udowodnimy, że $Q_k \geqslant k, \quad k = 1, 2, \ldots$. Dla $k = 1$ mamy $Q_1 = q_1$, gdzie $q_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ jest liczbą naturalną. Zakładając słuszność tezy dla jakiegoś k mamy $Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \geqslant Q_k + 1 \geqslant k + 1$. Tak więc

$$|x - R_n| < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \to \boxed{x = \lim_{n\to\infty} R_n}.$$

Z równania (1) (także z $x_{n+1} < q_{n+1} + 1$)

(3)

$$|x - R_n| = \frac{1}{(Q_n x_{n+1} + Q_{n-1})Q_n} > \frac{1}{(Q_n(q_{n+1} + 1) + Q_{n-1})Q_n} = \frac{1}{Q_n(Q_{n+1} + Q_n)}.$$

Z kolei, z równania (2), zastępując n przez $n+1$ i wykorzystując fakt, że $q_{n+2} \geqslant 1$ dostajemy

$$(4) \qquad |x - R_{n+1}| < \frac{1}{(Q_{n+1} + Q_n)Q_{n+1}}.$$

Z relacji (3) i (4), wykorzystując „po drodze"
$Q_{n+1} = Q_n q_n + Q_{n-1} > Q_n$ mamy

$$(5) \qquad \boxed{|x - R_{n+1}| < |x - R_n|, \qquad n = 1, 2, \ldots,}$$

co oznacza, że sukcesywne redukty stanowią coraz lepsze przybliżenie niewymiernego x. Dodatkowo wzór (1) pozwala stwierdzić, że kolejne przybliżenia są przemiennie nad- i nie-domiarowe:

$$x - R_n \quad \begin{cases} > 0, & \text{dla} \qquad n = 2k; \\ < 0, & \text{dla} \qquad n = 2k+1. \end{cases}$$

Parzyste redukty są zawsze mniejsze od x; nieparzyste – większe.

Z przedstawionych rozważań wynika też, że dla dowolnych n, $m > n$ mamy

$$|R_m - R_n| < \frac{1}{n(n+1)},$$

co jeszcze raz potwierdza istnienie granicy $x = \lim_{n\to\infty} R_n$, a także pozwala uzasadnić raz jeszcze, że obliczenia x sprowadzają się do obliczeń sekwencji x_i, gdzie

$$x_1 = \frac{1}{x - q_0}, \quad \dots, x_{n+1} = \frac{1}{x_n - q_n}; \quad q_n = \lfloor x_n \rfloor.$$

Jeszcze raz podkreślmy, że reprezentacja w postaci ułamka łańcuchowego liczby *niewymiernej* jest nieskończona; a liczby wymiernej – skończona. Gdyby nasze x było liczbą wymierną – $x = \frac{l}{m}$, to mielibyśmy

$$q_0 = \left\lfloor \frac{l}{m} \right\rfloor, \quad x_1 = \frac{1}{\frac{l}{m} - \left\lfloor \frac{l}{m} \right\rfloor} = \frac{m}{l - m\left\lfloor \frac{l}{m} \right\rfloor}.$$

Ale

$$\left\lfloor \frac{l}{m} \right\rfloor > \frac{l}{m} - 1; \qquad \rightarrow \quad \boxed{l - m\left\lfloor \frac{l}{m} \right\rfloor} < l - m\left(\frac{l}{m} - 1\right) = \boxed{m}.$$

Oznaczałoby to, że $\boxed{\text{kolejne mianowniki}}$ przybliżeń x_i muszą monotonicznie i „bez końca” maleć dla rosnącego i a to, przy skończoności sekwencji $m, m-1, \ldots, 1$ jest niemożliwe.

Przykład: $x = \sqrt{11}$.

Połóżmy (dla uwypuklenia struktury algorytmu) $x = x_0 = \sqrt{11}$;

$$q_0 = \lfloor x_0 \rfloor = \left\lfloor \sqrt{11} \right\rfloor = 3,$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - q_0} = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2}; \quad q_1 = \lfloor x_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{11} + 3}{2} \right\rfloor = 3,$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2} - 3} = \sqrt{11} + 3;$$

$$q_2 = \lfloor x_2 \rfloor = \left\lfloor \sqrt{11} + 3 \right\rfloor = 6,$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - q_2} = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = \frac{\sqrt{11} + 3}{2} = x_1; \quad q_3 = \lfloor x_3 \rfloor = \lfloor x_1 \rfloor = 3,$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - q_3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}} = \sqrt{11} + 3 = x_2; \quad q_4 = \lfloor x_4 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor = 6,$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ mamy: $q_{2k-1} = 3$, $q_{2k} = 6$. Długość okresu $m = 2$.
Stąd $\sqrt{11} = [3; \overline{3, 6}]$.

Przykład: $x = \sqrt{11}$, c.d

albo

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

kilka ładnych ułamków łańcuchowych

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \cfrac{49}{\ddots}}}}}}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \cfrac{81}{6 + \cfrac{121}{\ddots}}}}}}$$

kilka ładnych ułamków łańcuchowych, c.d

$$
\begin{aligned}
e &= \exp(1) = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,\ldots] \\
&= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}
\end{aligned}
$$

Prawo najlepszego przybliżenia

Załóżmy, że liczba niewymierna x, o rozwinięciu w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego, jest przybliżana przez pewną liczbę wymierną r/s, *lepiej* niż przez n-ty redukt ułamka R_n, to znaczy

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < |x - R_n|. \tag{6}$$

Ponieważ (patrz wyżej) $|x - R_n| < |x - R_{n-1}|$ mamy też

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < |x - R_{n-1}|. \tag{7}$$

Z rozważań, o położeniu kolejnych reduktów „po prawej" i „po lewej" wartości x, wynika, że x leży pomiędzy liczbami R_{n-1} i R_n;
z nierówności (6) i (7) – że pomiędzy tymi liczbami leży także r/s;

$$\left|\frac{r}{s} - R_{n-1}\right| < |R_{n-1} - R_n|. \tag{8}$$

Wyrażenie po prawej stronie to

$$|R_{n-1} - R_n| = \left| \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{|P_{n-1}Q_n - Q_{n-1}Q_n|}{Q_{n-1}Q_n} = \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Podstawiając do (8) mamy

$$\frac{|rQ_{n-1} - sP_{n-1}|}{sQ_{n-1}} < \frac{1}{Q_{n-1}Q_n}. \tag{9}$$

Licznik ułamka po lewej stronie to liczba całkowita różna od zera (dla zera mielibyśmy $r/s = R_{n-1}$, w sprzeczności z nierównością (7)). Stąd – a także z faktu, że $s > 1$ – wynika, że $rQ_{n-1} - sP_{n-1} > 1$ i, konsekwentnie, $s > Q_n$. Udowodniliśmy…

… twierdzenie

Jeżeli pewna liczba wymierna r/s, przybliża liczbę niewymierną x *lepiej* niż n-ty redukt ułamka R_n łańcuchowego to mianownik s tej liczby wymiernej jest *większy* od mianownika reduktu R_n.