Ułamki łańcuchowe i równanie diofantyczne: $ax - by = c$

Wprowadzenie

Przypomnienie:

Równanie $ax + by = c$, gdzie a, $b \in \mathbb{N}$; $a, b \neq 0$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a i b wtedy i tylko wtedy, gdy $d \mid c$, gdzie $d = (a, b)$. Jeżeli para liczb (x_0, y_0) jest rozwiązaniem, to pary

$$(x, y) = \left(x_0 + \frac{b}{d} \cdot t, y_0 - \frac{a}{d} \cdot t\right), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

stanowią wszystkie rozwiązania naszego równania.

Uwaga:

$$ax + by = c \to ax - (-b)y = c \qquad -ax + by = c \to (-a)x - (-b)y = c$$

metoda ułamków łańcuchowych

Ułamek $\frac{a}{b}$ przedstawiamy w postaci ułamka łańcuchowego (skończonego!) z reduktami

$$\frac{a}{b} = \left[\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}\right].$$

Ponieważ $d = (a, b)$ to $a = da'$ i $b = db'$, gdzie ułamek $a'/b' = P_n/Q_n$ jest ułamkiem nieskracalnym – $(a', b') = 1$.
Wykorzystujemy tożsamość

$$P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1} = (-1)^{n-1} = a'Q_{n-1} - b'Q_{n-1}.$$

Mnożąc stronami przez d mamy natychmiast

$$(-1)^{n-1}d = da'Q_{n-1} - db'Q_{n-1} = aQ_{n-1} - bQ_{n-1}, \quad \text{albo}$$

$$a\boxed{(-1)^{n-1}Q_{n-1}} - b\boxed{(-1)^{n-1}Q_{n-1}} = d.$$

Znaleźliśmy rozwiązanie równania $ax - by = d; \quad d = (a, b)$ w postaci

$$\boxed{x = (-1)^{n-1}Q_{n-1}, \qquad y = (-1)^{n-1}P_{n-1}.}$$

Przykład 1:

Rozwiążemy $364x - 227y = 1$. Przedstawiamy ułamek $364/227$

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{85}{53}, \frac{93}{58}, \frac{364}{227}\right] = \frac{a}{b} = \left[\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \dots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}\right].$$

Mamy więc $n = 7$ i

$$x = (-1)^{n-1} Q_{n-1} = 58;, \qquad y = (-1)^{n-1} P_{n-1} = 93.$$

Przykład 2:

Rozwiążemy

$$208x + 136y = 120. \tag{1}$$

Sprawdzamy: $(a, b) = (208, 136) = 8$; $b \mid 120$. Dzielimy przez 8, otrzymujemy $\boxed{26x + 17y = 15}$.

Zaczynamy od rozwiązania $\boxed{\text{równania}}$, w którym prawa strona (15) zastąpiona jest przez jedność; $26x' + 17y' = 1 = 26x' - 17(-y')$. Przedstawiamy ułamek $26/17$ w postaci ułamka łańcuchowego:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{26}{17}\right].$$

Mamy więc $n = 3$ i

$$x' = (-1)^{n-1} Q_{n-1} = 2;, \qquad (-y') = (-1)^{n-1} P_{n-1} = 3; \quad y' = -3.$$

Wystarczy pomnożyć otrzymane rozwiązania przez 15, aby otrzymać rozwiązania równania wyjściowego (1): $x = 30$, $y = -45$.