Ułamki łańcuchowe – drzewo Sterna-Brocota

Budujemy ułamki. . .

$$\frac{0}{1} \qquad \frac{1}{0}$$

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{1}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{5}{2} \qquad \frac{4}{1}$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{5}{1}$$

$$\boxed{\frac{p}{q} = \frac{m+m'}{n+n'}}$$

Drzewo Sterna-Brocota – zasady konstrukcji

- Każdy ułamek ma postać $\dfrac{m+m'}{n+n'}$ gdzie $\dfrac{m}{n}$ jest *najbliższym przodkiem* z lewej strony, a $\dfrac{m'}{n'}$ jest *najbliższym przodkiem* z prawej strony.
- Każdy ułamek *jest nieskracalny* – dla dwóch sąsiadów m/n i m'/n' zachodzi *zawsze*

$$m'n - mn' = 1. \tag{1}$$

dlaczego? Bo zachodzi dla dwóch ułamków startowych" $(0,1)$, $(1,0)$, a potem jeżeli jeden z ułamków zastąpię *mediantem* $\dfrac{m+m'}{n+n'}$ to *powinno* zachodzić

$$\text{(prawy)} \qquad (m+m')n - m(n+n') = 1$$

$$\text{(lewy)} \qquad m'(n+n') - (m+m')n' = 1$$

— te same równania co wyjściowe (1), czyli musi ono być spełnione na wszystkich, kolejnych etapach konstrukcji!

Drzewo Sterna-Brocota – zasady konstrukcji, c.d

- Dla $m/n < m'/n'$ mamy (do udowodnienia, a właściwie sprawdzenia)

$$\frac{m}{n} < \frac{m+m'}{n+n'} < \frac{m'}{n'}; \qquad m, n, m', n' > 0$$

  a to oznacza, że dany mediant może się pojawić tylko pomiędzy (choć nie dokładnie w środku) dwoma przodkami, stąd dany mediant (jako dany ułamek) może pojawić się tylko raz!

- *Każdy* nieskracalny ułamek $\frac{a}{b}$, $a \perp b$ musi się w tym drzewie pojawić!
  Można udowodnić, że dopadniemy go po nie więcej niż $a + b$ krokach konstrukcji.

Ciąg Fareya rzędu N to ...

Definicja:

...uporządkowany rosnąco ciąg ułamków o licznikach i mianownikach względnie pierwszych, z przedziału $[0,1]$, których mianowniki są $\leqslant N$.

Przykład

$$\mathcal{F}_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Konstrukcja

$\mathcal{F}_N$ uzyskujemy z $\mathcal{F}_{N-1}$, wkładając medianty $(m+m')/N$ pomiędzy *kolejne* ułamki m/n i m'/n', których mianowniki spełniają $n+n'=N$. Ile mediantów dla $N=p$?

Przykład

$$\mathcal{F}_7 = \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}.$$

Ciąg Fareya tworzy system pozycyjny ...

...reprezentujący wszystkie liczby wymierne. Tak!

- Konwencja: startujemy od „korzenia” $\frac{1}{1}$ i schodzimy w dół, przy każdym poziomie odchylając się w lewo ($\mathcal{L}$), bądź w prawo ($\mathcal{P}$).
- Na przykład $5/7 = \mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{L}$.
- Liczby niewymierne oczywiście wystąpić nie mogą, ale ich przybliżenia – tak!
- Na przykład

$$e = \mathcal{P}\mathcal{L}^0\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^2\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}^4\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^6\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}^8\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}^{10}\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}^{12}\mathcal{P}\dots$$

-

$$\frac{1}{1}\ \mathcal{P}\ \frac{2}{1}\ \mathcal{P}\ \frac{3}{1}\ \mathcal{L}\ \frac{5}{2}\ \mathcal{P}\ \frac{8}{3}\ \mathcal{P}\ \frac{11}{4}\ \mathcal{L}\ \frac{19}{7}\ \mathcal{P}\ \frac{30}{11}\ \mathcal{L}\ \frac{49}{18}\ \mathcal{L}\ \frac{68}{25}\ \mathcal{L}$$

$$\frac{87}{32}\ \mathcal{L}\ \frac{106}{39}\ \mathcal{P}\ \frac{193}{71}\ \mathcal{L}\ \frac{299}{110}\ \mathcal{P}\ \frac{492}{181}\ \mathcal{P}\ \frac{685}{252}\ \mathcal{P}\ \frac{878}{323}\ \mathcal{P}$$

Ciąg Fareya – ile jest ułamków w ciągu $\mathcal{F}_n$?

Można wykazać (łatwo), że ta liczba jest o 1 (to ułamek 1/1) od wartości funkcji

$$\Phi(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant x} \phi(k),$$

gdzie $\phi(k)$ to funkcja Eulera– liczba liczb względnie pierwszych i nie większych od k.
Z definicji wynika, że $\Phi(x) = \Phi(\lfloor x \rfloor)$. Zachodzi dość intrygujący (i nie do końca łatwy do wykazania) wzór

$$\sum_{d \geqslant 1} \Phi\left(\frac{x}{d}\right) = \lfloor x \rfloor \lfloor x + 1 \rfloor,$$

z którego wynika jeszcze inny wzór określający bezpośrednio $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{d \geqslant 1} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor \lfloor 1 + x/d \rfloor,$$

gdzie μ to funkcja Moebiusa.