Fizyka kwantowa

Notatki z wykładu z fizyki kwantowej prowadzonego na trzecim semestrze fizyki technicznej przez

Prof. Janusza Wolnego,

sporządzone przez

Joannę Ropkę

I Promieniowanie termiczne. Katastrofa w nadfiolecie.

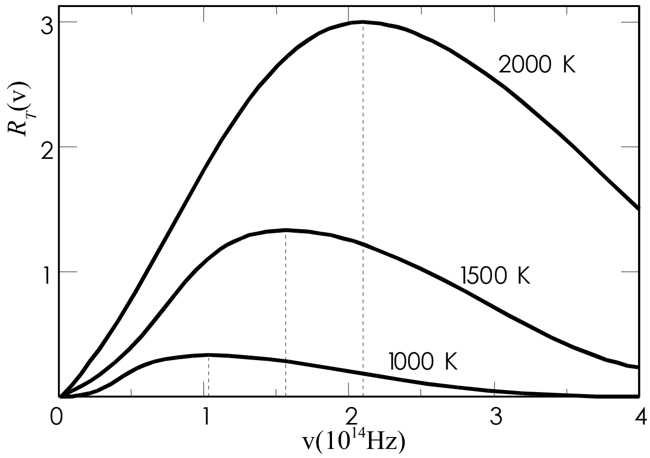
Promieniowanie wysyłane przez ciało ogrzane do pewnej temperatury nazywane jest promieniowaniem termicznym (cieplnym lub temperaturowym). Wszystkie ciała emitują takie promieniowanie do swojego otoczenia, a także z tego otoczenia je absorbują. Jeśli na początku ciało ma wyższą temperaturę niż jego otoczenie, ciało to będzie się oziębiać, ponieważ szybkość wypromieniowywania przez nie energii będzie przewyższała szybkość jej absorpcji. Gdy zostanie osiągnięta równowaga termodynamiczna, wtedy szybkość emisji będzie równa szybkości absorpcji.
Materia w stanie skondensowanym (ciała stałe, ciecze) emituje promieniowanie o widmie ciągłym. Szczegóły tego widma są prawie niezależne od rodzaju substancji, z której zbudowane jest ciało, natomiast zależą one silnie od temperatury ciała. W zwykłych temperaturach większość ciał jest dla nas widoczna nie dlatego, że ciała te wysyłają światło, ale dlatego, że je odbijają lub rozpraszają. Jeśli na takie ciało nie pada światło, to jest ono niewidoczne. Jednak gdy ciała mają wysoką temperaturę, wtedy świecą własnym światłem. Możemy je widzieć, jak się żarzą w ciemnym pokoju. Ale nawet w temperaturach tak wysokich jak kilka tysięcy kelwinów ogromna część, bo ponad 90% emitowanego promieniowania cieplnego jest dla nas niewidzialna, należy ona bowiem do obszaru widma promieniowania elektromagnetycznego zwanego podczerwienią. Dlatego też ciała, które świecą własnym światłem muszą być bardzo gorące.

Szczegółowa postać widma promieniowania termicznego wysyłanego przez gorące ciało zależy w pewnym stopniu od składu tego ciała. Z doświadczeń wynika, że istnieje klasa rozgrzanych ciał, które emitują promieniowanie o widmie mającym charakter uniwersalny. **Są one nazywane ciałami doskonale czarnymi, tzn. ciałami, których powierzchnie absorbują całe promieniowanie nań padające.** Nazwa taka wydaje się bardzo odpowiednia, ponieważ ciała te nie odbijają światła i wobec tego można je uznać za czarne (nie należy mylić z ciałami o kolorze czarnym).

Jak w praktyce realizujemy ciała doskonale czarne? Robi się pudło z bardzo małym otworkiem i wnętrze tego pudła pokrywa się sadzą (sadza ma bardzo dobre własności pochłaniania promieniowania). Wówczas promieniowanie wpadające w ten otworek odbija się wielokrotnie od powierzchni wewnętrznej pudła, a ponieważ ma ona bardzo mały współczynnik odbicia, więc po kilkunastu odbiciach promieniowanie zostaje zaabsorbowane przez pudło.
Dla metalowego pudła wyścielonego sadzą, obserwuje się otwór i mierzy rozkład widmowy promieniowania, który jest jednakowy dla wszystkich ciał doskonale czarnych. Nie zależy ono ani od składu chemicznego, ani od wymiarów geometrycznych. Fakt ten można wyjaśnić opierając się na klasycznych rozważaniach równowagi termodynamicznej. Jednakże na gruncie samych tylko rozważań termodynamicznych nie można wyznaczyć dokładnego kształtu krzywej opisującej widmo promieniowania.

Rozkład widmowy promieniowania ciała doskonale czarnego charakteryzuje funkcja $R_T(\nu)$ zwana zdolnością emisyjną ciała, zdefiniowana w ten sposób, że wielkość $R_T(\nu)d\nu$ jest równa energii promieniowania o częstotliwości leżącej w przedziale od ν do $\nu + d\nu$, wysyłanego w ciągu jednostki czasu przez jednostkę powierzchni ciała mającego temperaturę bezwzględną *T*.

Otrzymaną doświadczalnie zależność $R_T(\nu)$ od ν oraz od T przedstawia rysunek:



Całka ze zdolności emisyjnej $R_T(\nu)$ po wszystkich częstotliwościach ν jest równa całkowitej energii wyemitowanej w ciągu jednostki czasu z jednostki powierzchni ciała doskonale czarnego o temperaturze T. Jest ona zwana **całkowitą zdolnością emisyjną R_T:**

$$R_T = \int_0^\infty R_T(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Ze wzrostem temperatury wielkość R_T gwałtownie wzrasta. Stanowi to treść **prawa Stefana:**

$$R_T = \sigma T^4,$$

gdzie σ ($\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ W/m^{2}K^4) jest **stałą Stefana – Boltzmanna**.

Ze wzrostem temperatury T widmo promieniowania ulega przesunięciu w stronę krótszych długości fali. Fakt ten wyraża **prawo przesunięć Wiena**

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{C}{T}}$$

gdzie $C = 2898\ \ \mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$, $\lambda_{\max}$ jest długością fali, dla której $R_T(\lambda)$ ma w danej temperaturze T wartość maksymalną.

Wszystkie podane wyżej stwierdzenia pozostają w zgodzie z prostymi faktami doświadczalnymi omawianymi uprzednio, a mianowicie gdy temperatura ciała wzrasta, wtedy ilość emitowanego promieniowania gwałtownie wzrasta, a długość fali promieniowania odpowiadająca maksymalnej zdolności emisyjnej – maleje (kolor rozgrzewanych przedmiotów zmienia się od czerwonego do niebiesko-białego).

Klasyczna teoria promieniowania ciała doskonale czarnego.

Rozważmy pudło (ciało doskonale czarne) emitujące promieniowanie. Fale elektromagnetyczne są falami poprzecznymi. Wektor pola elektrycznego **E** jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali, a ponieważ kierunek rozchodzenia się rozważanej składowej jest prostopadły do odbijającej ścianki, więc wektor **E** jest równoległy do tej ścianki. Na powierzchni metalowej ścianki nie może jednak występować równoległe do niej pole elektryczne, bowiem ładunki elektryczne zawsze mogą przemieścić się w taki sposób, że zneutralizują to pole. Dlatego też, w przypadku rozważanej składowej promieniowania, wartość E na ściance $x = 0$ musi być zawsze równa zeru. Fala stojąca w płaszczyźnie prostopadłej do x musi zatem mieć węzeł na tej ściance. Fala ta musi także mieć węzeł na powierzchni $x = a$. Podobne rozważania stosują się także do pozostałych dwóch kierunków. Warunki te nakładają ograniczenia na możliwe długości fal, a więc i na częstotliwości promieniowania elektromagnetycznego zawartego we wnęce.

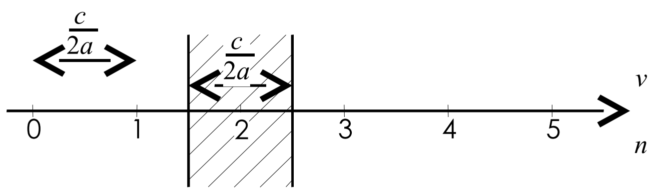
Spróbujmy podejść do zagadnienia w taki sposób, na jaki pozwalał poziom wiedzy pod koniec XIX w. Dobrze była wówczas rozwinięta termodynamika, znano równania stanu gazu oraz sposób opisywania układów termodynamicznych. Zastosujmy tę wiedzę dla opisania gazu, którym jest gaz fotonów.

Należy tu jeszcze przypomnieć **zasadę ekwipartycji energii, która mówi, że na każdy składnik energii zależny od kwadratu pędu i położenia przypada $kT/2$ energii** (k – stała Boltzmanna). Każda fala stojąca niesie ze sobą średnią energię: $\varepsilon = kT$. Żeby policzyć całą energię emisyjną musimy pomnożyć energię jednej fali przez liczbę fal, które mogą w takim pudle powstać. Innymi słowy musimy uwzględnić gęstość promieniowania.

Rozważmy najpierw jedynie samą składową x, tzn. przeanalizujemy uproszczony, nie mający odpowiednika w rzeczywistości przypadek jednowymiarowej wnęki o długości a.

Ponieważ we wnęce powstają fale stojące, więc musi być spełniony warunek

$$a = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2a}{n}, \qquad \nu = \frac{nc}{2a}.$$



Na ten obszar przypada 1 stan, ale fale elektromagnetyczne mogą mieć dwa kierunki polaryzacji, czyli w tym obszarze realizowane są dwie fale. Zatem gęstość stanów

$$n(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{2}{\frac{c}{2a}} = 2 \cdot \frac{2a}{c}$$

Rozpatrzmy rezonator trójwymiarowy. Aby policzyć gęstość stanów dla danej częstotliwości, należy skonstruować w przestrzeni wektora falowego powierzchnie stałej energii, którą jest sfera o promieniu ν . Jeden stan przypada na odległość $c/2a$ w przestrzeni jednowymiarowej, więc w przestrzeni trójwymiarowej będzie to $(c/2a)^3$. Wraz z objętością sfery określonej dla dodatnich ν , daje to:

$$n(\nu)\mathrm{d}\nu = \left(\frac{2a}{c}\right)^3 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4\pi\nu^2 \cdot 2\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2\mathrm{d}\nu$$

tyle drgań może się zrealizować w pudle rezonansowym o wymiarze a.

Zdolność emisyjna na jednostkę objętości ρ_T

$$\rho_T(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}\mathrm{d}\nu$$

Jest to wzór Rayleigha – Jeansa dla promieniowania ciała doskonale czarnego. Wzór ten poprawnie opisuje wartości eksperymentalne tylko dla małych ν. Zasadniczo jednak nie zgadza się z eksperymentem. Fakt ten nazwano „katastrofą w nadfiolecie'', gdyż ciała wypromieniowałyby całą energię w zakresie nadfioletu.

Teoria Plancka promieniowania we wnęce.

Planck stwierdził, że w przypadku promieniowania ciała doskonale czarnego średnia energia fal stojących jest funkcją częstotliwości. Stwierdzenie to było w jawnej sprzeczności z prawem ekwipartycji energii, które średniej energii przypisuje wartość niezależną od częstotliwości.
Na podstawie obliczeń dla oscylatorów Planck oszacował, że do opisu promieniowania należy brać układ o wartościach energii odpowiednio skwantowanych, a nie ciągłych. Odkrył, że dla małej różnicy $\Delta\varepsilon$ między kolejnymi wartościami energii otrzymuje się $\varepsilon \approx kT$, natomiast dla dużego $\Delta\varepsilon$ wartość średnia energii $\varepsilon \approx 0$. Ponieważ pierwszy z tych wyników był potrzebny dla małych częstotliwości, a drugi dla dużych, więc Planck musiał przyjąć, że $\Delta\varepsilon$ jest rosnącą funkcją ν :

$$\Delta\varepsilon = h\nu ,$$

gdzie $\boldsymbol{h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}}$ **J·s** jest stałą Plancka.

Wyrażenie na ε , które uzyskał Planck to:

$$\varepsilon(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Ponieważ $e^{\frac{h\nu}{kT}} \to 1 + \frac{h\nu}{kT}$ (dla $\frac{h\nu}{kT} \to 0$), więc w granicy tej $\varepsilon(\nu) \to kT$;
z kolei dla $\frac{h\nu}{kT} \to \infty$, $e^{\frac{h\nu}{kT}} \to \infty$ i $\varepsilon(\nu) \to 0$, czyli wyniki pokrywają się z obserwacjami.

Wyrażenie na gęstość energii promieniowania ciała doskonale czarnego, otrzymane przez Plancka i zwane **wzorem Plancka na rozkład widmowy promieniowania ciała doskonale czarnego, ma postać :**

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu$$

Wielki wkład Plancka do teorii zjawisk fizycznych można przedstawić w postaci następującego postulatu:

Dowolny obiekt fizyczny o jednym stopniu swobody, którego „współrzędna" jest sinusoidalną funkcją czasu (a więc wykonuje proste drgania harmoniczne), może mieć tylko taką energię całkowitą, która spełnia związek

$$\varepsilon = nh\nu \qquad \boldsymbol{n = 0,1,2,...}$$

gdzie ν **jest częstotliwością drgań, a** $\boldsymbol{h}$ **jest stałą uniwersalną.**

Termin „współrzędna" użyty jest tu w ogólnym sensie i oznacza każdą wielkość opisującą chwilowy stan danego obiektu fizycznego. Przykładami takiej współrzędnej są: długość sprężyny, amplituda fali; wielkości te są sinusoidalnymi funkcjami czasu.

Kolejnym krokiem było wyprowadzenie praw : Wiena i Stefana.

Prawo przesunięć Wiena:

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ - zależność nieliniowa, więc $\qquad \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$

$$\rho_T(\nu)d\nu \to \rho_T(\lambda)d\lambda \qquad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda \qquad \rho_T(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^5}$$

$$\frac{d\rho_T(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_{max}\cdot T = 0{,}2014\,\mathrm{hc/K}$$

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right)-1\right]}d\lambda$$

$$\rho_T(\lambda) = \max \Rightarrow \frac{d\rho_T(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^5\left(\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right)-1\right)\right] = 0$$

co prowadzi do równania

$$5\left(e^{\alpha}-1\right) = e^{\alpha}\cdot\alpha \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha = \frac{hc}{kT\lambda}$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest

$$\alpha_1 \approx 4{,}966$$

co daje

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{k\lambda_1} \cdot \frac{1}{T} = \frac{const}{T}$$

Prawo Stefana:

$$\rho_T = \int_0^\infty \rho_T(\nu)\,d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma \cdot T^4$$

Nagrody Nobla dla Wiena (1911 r.) i Plancka (1918 r.)

Na podstawie widma promieniowania cieplnego można określić temperaturę ciała. Służą do tego przyrządy zwane pirometrami. Przykładem promieniowania temperaturowego jest tzw. promieniowanie reliktowe odkryte w 1961 r. przez A. Penziasa (nagroda Nobla w 1978 r.). Jest to promieniowanie o temperaturze **2,735° K** będące pozostałością po wielkim wybuchu sprzed ok. 10^{10} lat.