Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Figure 1: Aproksymacja drzewem dwumianowym

Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

W chwili T mamy $C(T) = (S(T) - K)^+$ (ogólnie $D_f(T) = f(S(T))$)

Pytanie o cenę $C(0)$

Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

W chwili T mamy $C(T) = (S(T) - K)^+$

Pytanie o cenę $C(0)$

$C(t) = u(t, S(t))$

Wzór Ito-Doeblina

$dC(t) = du(t, S(t))$

$= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}aS(t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}\sigma S(t)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 S^2(t)dt$

$C(t) = u(t, S(t))$

Wzór Ito-Doeblina

$$dC(t) = du(t, S(t))$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} aS(t) dt + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma S(t) dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 S^2(t) dt$$

$$C(t) = u(t, S(t))$$

Wzór Ito-Doeblina

$$dC(t) = du(t, S(t))$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}aS(t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}\sigma S(t)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 S^2(t)dt$$

postać całkowa

$$C(T) = C(0) + \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}aS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 S^2(t)\right) dt$$
$$+ \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}\sigma S(t)dW(t)$$

$$C(t) = u(t, S(t))$$

Wzór Ito-Doeblina

$$dC(t) = du(t, S(t))$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} aS(t)dt + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma S(t)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 S^2(t)dt$$

postać całkowa

$$\mathbb{E}C(T) = C(0) + \mathbb{E}\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} aS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sigma^2 S^2(t)\right) dt$$

$C(t) = u(t, S(t))$

Wzór Ito-Doeblina

$dC(t) = du(t, S(t))$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} aS(t)dt + \frac{\partial u}{\partial x} \sigma S(t) dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 S^2(t) dt$$

postać całkowa

$$\mathbb{E}C(T) = C(0) + \mathbb{E} \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} aS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sigma^2 S^2(t) \right) dt$$

$C(0) = u(0, x)$ gdzie $x = S(0)$, a u jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ax \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

w zbiorze $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$ z warunkiem końcowym:

$$u(T, x) = (x - K)^+$$

Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

W chwili T mamy $C(T) = (S(T) - K)^+$

Pytanie o cenę $C(0)$

Oznaczamy $x = S(0)$

$$C(0) = u(0, x) = \mathbb{E}((S(T) - K)^+) \text{ (Wzór Feynmana-Kaca)}$$

gdzie u jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ax\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

w zbiorze $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$ z warunkiem końcowym:

$$u(T, x) = (x - K)^+$$

Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = a(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW(t)$$

W chwili T mamy $C(T) = (S(T) - K)^+$

Pytanie o cenę $C(0)$

Oznaczamy $x = S(0)$

$$C(0) = u(0, x) = \mathbb{E}((S(T) - K)^+) \text{ (metody Monte-Carlo)}$$

gdzie u jest rozwiązaniem równania (metody numeryczne)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(t, x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

w zbiorze $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$ z warunkiem końcowym:

$$u(T, x) = (x - K)^+$$

Wycena opcji

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

W chwili T mamy $C(T) = (S(T) - K)^+$

Pytanie o cenę $C(0)$

Oznaczamy $x = S(0)$

$$C(0) = u(0, x) = \mathbb{E}((S(T) - K)^+) \text{ (Wzór Feynmana-Kaca)}$$

gdzie u jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ax\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

w zbiorze $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$ z warunkiem końcowym:

$$u(T, x) = (x - K)^+$$

Wycena opcji - Twierdzenie Girsanowa

Dynamika cen akcji:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

W chwili T mamy $C(T) = (S(T) - K)^+$

Pytanie o cenę $C(0)$

Oznaczamy $x = S(0)$

$$C(0) = u(0, x) = \mathbb{E}(e^{-rT}(S(T) - K)^+) \text{ (\textbf{Wzór Blacka-Scholesa})}$$

gdzie u jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + rx\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru = 0$$

w zbiorze $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$ z warunkiem końcowym:

$$u(T, x) = (x - K)^+$$

Ryzyko kredytowe

Model Mertona (strukturalny)

Instrument bazowy: wartość firmy

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma V(t)dW(t)$$

Ryzyko kredytowe

Model Mertona (strukturalny)

Instrument bazowy: wartość firmy

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma V(t)dW(t)$$

Dług w chwili T w wysokości D

$V(T) > D$ spłata, zostaje $V(T) - D$ dla akcjonariuszy

$V(T) \leq D$ bankructwo, zostaje 0

Ryzyko kredytowe

Model Mertona (strukturalny)

Instrument bazowy: wartość firmy

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma V(t)dW(t)$$

Dług w chwili T w wysokości D

$V(T) > D$ spłata, zostaje $V(T) - D$ dla akcjonariuszy

$V(T) \leq D$ bankructwo, zostaje 0

Wypłata dla akcjonariuszy w chwili T : $(V(T) - D)^+$

Akcja - opcja kupna

$S(0) = C(0)$ - cena opcji kupna

Prawdopodobieństwo bankructwa:

$$P(V(T) < D) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{(-\infty,D)}(V(T)))$$

Sprzedaż - przepływy gotówki

poziom sprzedaży

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma_X X(t)dW_X(t)$$

Sprzedaż - przepływy gotówki

poziom sprzedaży

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma_X X(t)dW_X(t)$$

ściąganie należności

$$dY(t) = (b - Y(t))dt + \sigma_Y dW_Y(t)$$

$$F : (-\infty, \infty) \to [0, 1]$$

$F(Y(t))$ procent sprzedaży w formie gotówki

Sprzedaż - przepływy gotówki

poziom sprzedaży

$$dX(t) = aX(t)dt + \sigma_X X(t)dW_X(t)$$

ściąganie należności

$$dY(t) = (b - Y(t))dt + \sigma_Y dW_Y(t)$$

$$F : (-\infty, \infty) \to [0, 1]$$

$F(Y(t))$ procent sprzedaży w formie gotówki

$$dG(t) = X(t)F(Y(t))dt - cX(t)dt - rDdt$$

korekta

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(X(t) + \gamma G(t))dt + \sigma_X X(t)dW_X(t) \\ &= a(X(t), Y(t))dt + \sigma_X X(t)dW_X(t) \end{aligned}$$

Ogólnie ($X_1 = X$, $X_2 = Y$)

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= a(X_1(t), X_2(t))dt + \sigma_1 X_1(t) dW_1(t) \\ dX_2(t) &= (b - X_2(t))dt + \sigma_2 dW_2(t) \end{aligned}$$

$$u_t + a(x_1, x_2)u_{x_1} + (b - x_2)u_{x_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 u_{x_1x_2} + \frac{1}{2}x_1^2\sigma_1^2 u_{x_1x_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 u_{x_2x_2} = 0$$

Bankructwo: $X_1(t) < 0$, opcja amerykańska

Prawdopodobieństwo bankructwa, zależność od ρ

.

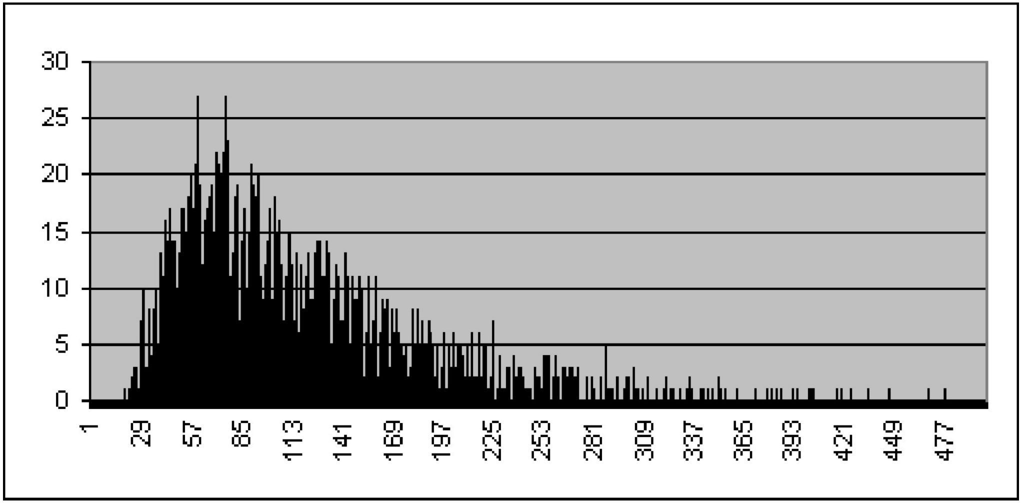

Figure 2: Symulacja Monte-Carlo: histogram momentu bankructwa

Proces Poissona

τ_i niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie wykładniczym (gęstość $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ dla $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} N(0) &= 0 \\ N(t) &= \max\{n : \sum_{i=1}^{n} \tau_i \leq t\} \end{aligned}$$

Przyrosty procesu Poissona są niezależne, stacjonarne,

$$P(N(t) - N(s) = k) = \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$$

Złożony proces Poissona

Y_n niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Równanie na wartość firmy

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma V(t)dW(t) + V(t^-)dQ(t)$$

Złożony proces Poissona

Y_n niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Równanie na wartość firmy

$$dV(t) = aV(t)dt + \sigma V(t)dW(t) + V(t^-)dQ(t)$$

Szczególny przypadek: Y_n o tym samym rozkładzie dyskretnym:
wartości $\{y_1, \ldots, y_k\}$, prawdopodobieństwa $p_1, \ldots, p_k$
Równanie cząstkowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ax\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{i=1}^{k} p_i(u(t,(y_i+1)x) - u(t,x)) = 0$$