

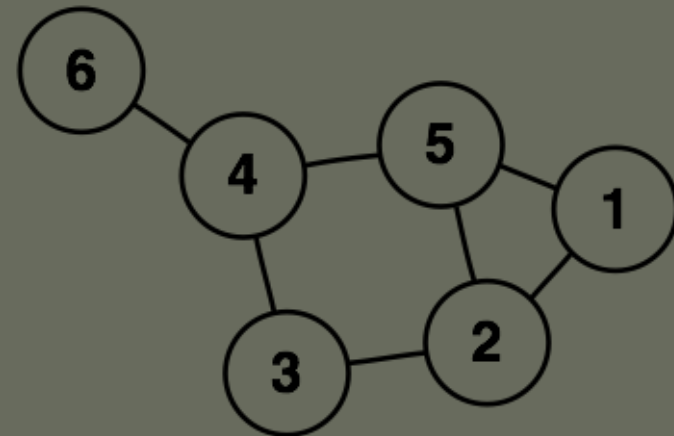
# **COMPLEXITY CHARACTERISTICS OF CURRENCY NETWORKS**

**A.Z. Górski, S. Drożdż, J. Kwapien, P. Oświęcimka**

**Zakład Teorii Systemów Złożonych,  
Instytut Fizyki Jądrowej PAN, Kraków**

## Układy o wielkiej złożoności można przedstawiać jako sieci oddziałujących elementów-węzłów

- WWW (World Wide Web) i sieci komputerowe;
- sieci komunikacyjne – transport;
- sieci komunikacyjne – łączność;
- sieci energetyczne;
- sieci neuronowe;
- sieci cytacji;
- sieci relacji międzyludzkich;
- G.W. Domhoff (1967+) „4 networks theory of Power” ideologiczna, ekonomiczna, militarna i polityczna
- sieci w finansach i inne...



[sociology.ucsc.edu/whorulesamerica/](http://sociology.ucsc.edu/whorulesamerica/)

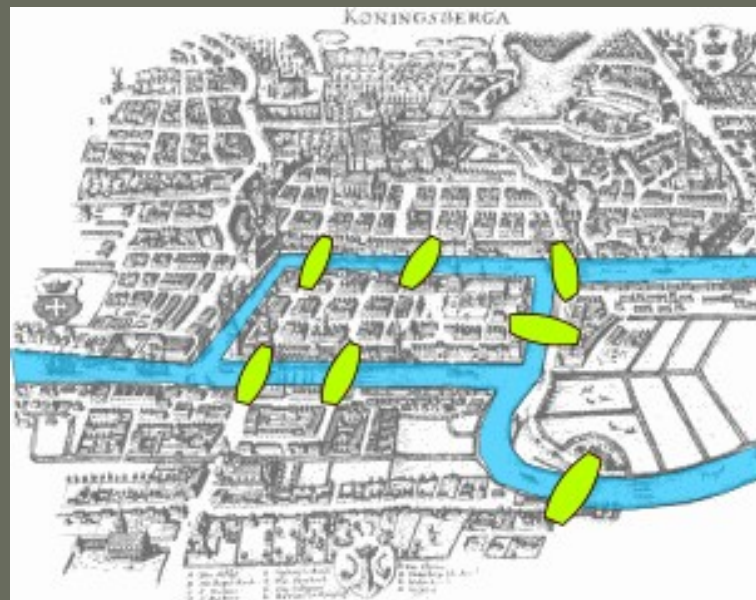
## GRAFY -- podstawy

- ❑ L.Euler – 7 mostów Królewca (1736);
- ❑ prawa Kirchhoffa (1845);
- ❑ problem 4 kolorów (F.Guthrie 1852 => Appel & Haken 1976);

### **Grafy przypadkowe (XX w.):**

- ❑ własności wyznaczają rozkłady prawdopodobieństwa;
- ❑ zmienna liczba węzłów i połączeń;
- ❑ grafy spójne i nieplanarne;
- ❑ przejścia fazowe powyżej progu komplikacji;

Teoria grafów => grafami statyczne, bez ewolucji w czasie...



## SIECI (ewolucja w czasie) – początki

□ powstawanie/znikanie połączeń;

□ zmienne w czasie wagi;

□ **SIECI NEURONOWE\*** :

✓ model McCullocha-Pittsa (1943);

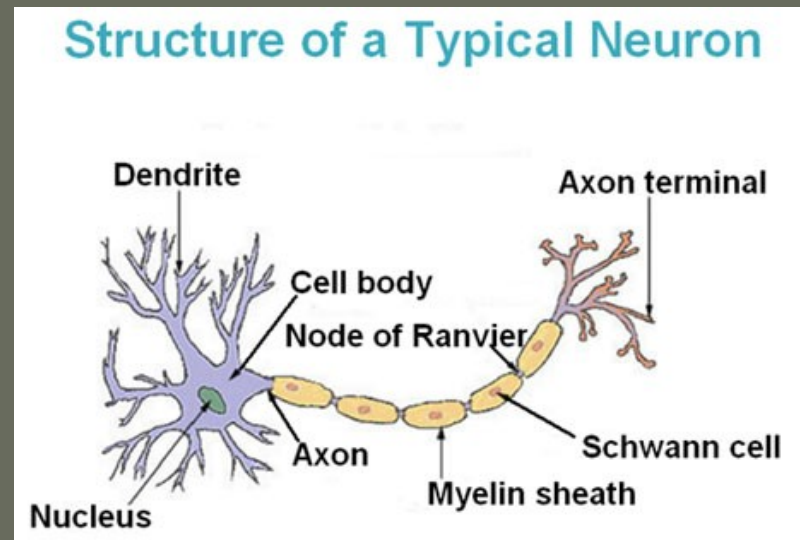
✓ nieliniowa transformacja sygnału:

$$y_i = f\left(\sum_j W_{ij} x_j\right)$$

✓ uczenie (zmiana wag, Hebb 1949);

✓ *Perceptron* (pattern recognition) – Rosenblatt-Wightman 1957-Cornell;

□ sprzężenia zwrotne, architektura rekurencyjna ==> Hopfield i inni, 1928 + ...



\* Termin **neuron** (jak i **chromosom!**) wprowadził H.W. Gottfried von Waldeyer-Hartz w 1891 roku.

## SIECI ZŁOŻONE

- ❑ „małe światy” (*Small Worlds*) – *6th degree of separation* [Milgram 1967] – efekt podobny jak dla grafów przypadkowych;
- ❑ tworzenie klastrów – *clustering coefficient*  $C_i$  dla  $i$ -tego węzła:

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}$$

$k_i$  – liczba połączeń z węzła (stopień),  $k_i(k_i - 1)/2$  – max. liczba połączeń w klastrze,  $E_i$  – faktyczna liczba połączeń;

- ❑ potęgowy rozkład stopni węzłów – sieci **bezskalowe** (*scale free*):  
prawdopodobieństwo znalezienia węzła w stopniu  $k$  jest potęgowe:

$$P(k) \propto k^{-\alpha}$$

**PROBLEM:** Jak ilościowo zdefiniować połączenia i węzły w sieci ekonofizycznej? Jak wygląda rozkład stopni węzłów? ...

## **SIECI W FIZYCE - znaczenie liczby połączeń/sąsiadów**

- ❑ model Isinga (E. Ising 1924 – L. Onsager 1944) i uogólnienia: proste sieci spinów wykazują przejścia fazowe przy zmianie temperatury; modele pochodne;
- ❑ oddziaływania długozasięgowe ==> zwiększenie liczby oddziałujących sąsiadów ==> efekt jak zwiększenie wym. przestrzeni (Kac model 1963);
- ❑ powoduje to wzrost stopnia komplikacji systemu – przejścia fazowe;
- ❑ nieskończenie zasięgowe oddziaływania ==> wielka komplikacja (grawitacja – struktury kosmologiczne, elektromagnetyzm – struktury biochemiczne);
- ❑ analogicznie: wielka ilość połączeń (sąsiadów) w sieci neuronów mózgowych, jak i w sieciach „społecznych”;

### **WNIOSEK:**

**Ilość połączeń (oddziałujących sąsiadów) sieci ważniejsza niż wymiar!**

# SERIE CZASOWE STÓP ZWROTU

- stopa zwrotu dla serii finansowej  $x_n = x(t_n)$  wyrażonej w jakiejś walucie

$$G_n(x) = \ln x_{n+1} - \ln x_n \approx (x_{n+1} - x_n) / x_n$$

- dla serii FOREX wartość waluty  $x$  jest wyrażona poprzez walutę  $y$  – dla  $K$  walut mamy  $K(K-1)$  serii postaci

$$G_n(x, y) = \ln \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \ln \frac{x_n}{y_n} = G_n(x) - G_n(y)$$

- serie te są zależne

$$\frac{x_n}{y_n} \frac{y_n}{x_n} = 1$$

co w języku zwrotów daje  $G_n(x, y) = -G_n(y, x)$

- dla 3 walut mamy dodatkowy warunek RAGUŁĘ TRÓJKĄTA

$$\frac{x_n}{y_n} \frac{y_n}{z_n} \frac{z_n}{x_n} = 1$$

a w języku zwrotów mamy tożsamość

$$G_n(x, y) + G_n(y, z) + G_n(z, x) = 0$$

## MACIERZ KORELACJI serii czasowych

- nasze serie czasowe: dane dzienne, lata 1998-2005 (ok. 1700 punktów), filtr  $5\sigma$ , źródło: <http://fx.sauder.ubc.ca> (Univ. B.C., Bank of Canada);
- dla  $N$  serii czasowych zwrotów  $G_i(t)$  symetryczna macierz współczynników korelacji –  $N(N-1)/2$  niezależnych:  
gdzie  $T$  – „okno uśredniania”,  
a ślad macierzy =  $N$

$$C_{ij} = \frac{\langle G_i(t)G_j(t) \rangle_T - \langle G_i(t) \rangle_T \langle G_j(t) \rangle_T}{\sigma(G_i) \sigma(G_j)}$$

### WARTOŚCI WŁASNE

- rozkład pomiędzy *semi-circle* (Wigner) a *Wisharta*;
- duża maksymalna wartość własna – kolektywność serii stóp zwrotu;
- mody zerowe – dla serii silnie skorelowanych (np. USD i SAR);

Jak przenieść język macierzy korelacji na język grafów?



## SPEKTRUM MACIERZY KORELACJI

### Wg teorii dla macierzy przypadkowych

dla serii o długości serii czasowej  $T$ , ilości serii  $N$  i  $q = T/N$ , mamy widmo w zakresie:

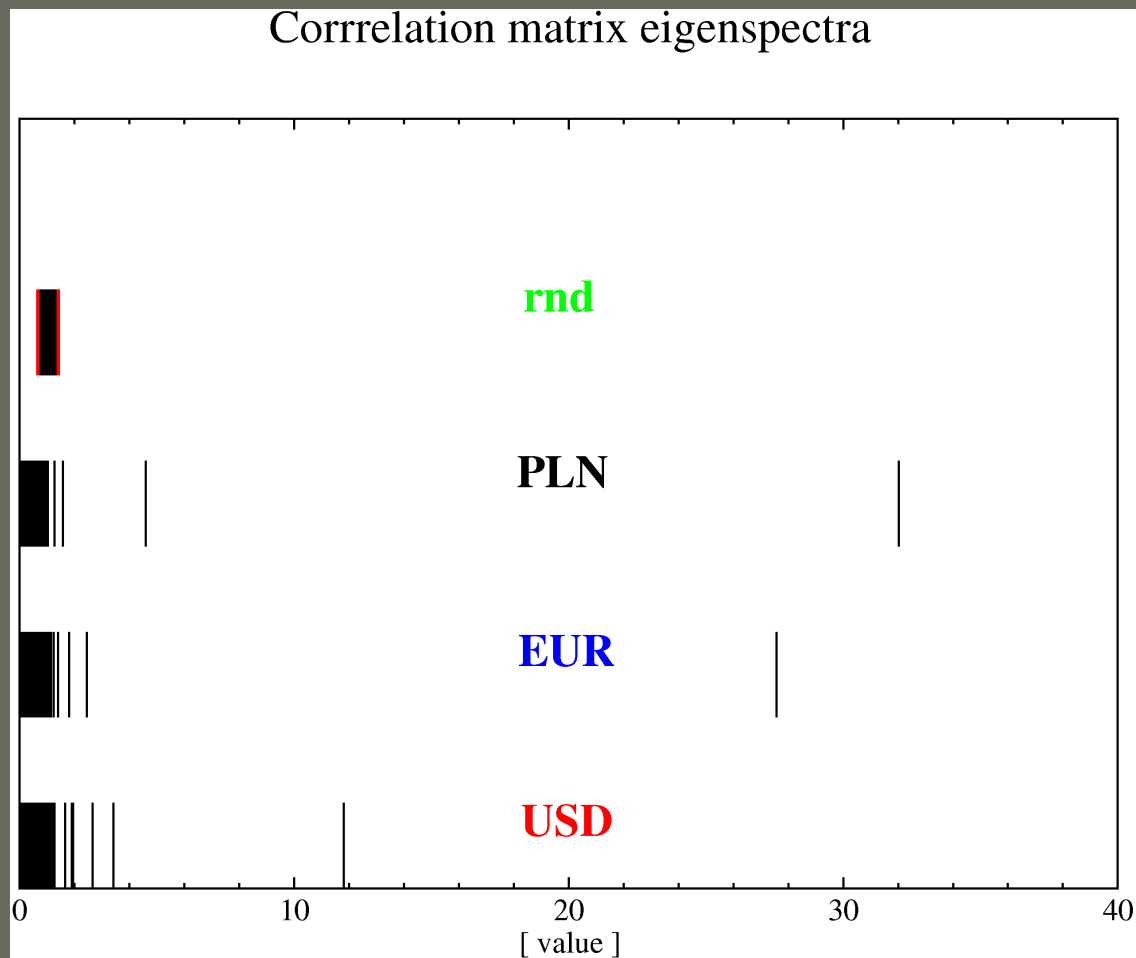
$$\lambda_{\min} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{2}{\sqrt{q}} \quad \text{oraz} \quad \lambda_{\max} = 1 + \frac{1}{q} + \frac{2}{\sqrt{q}}$$

co w tym przypadku daje numerycznie:

$$\lambda_{\min} \geq 0.658 \quad \text{oraz} \quad \lambda_{\max} \leq 1.413$$

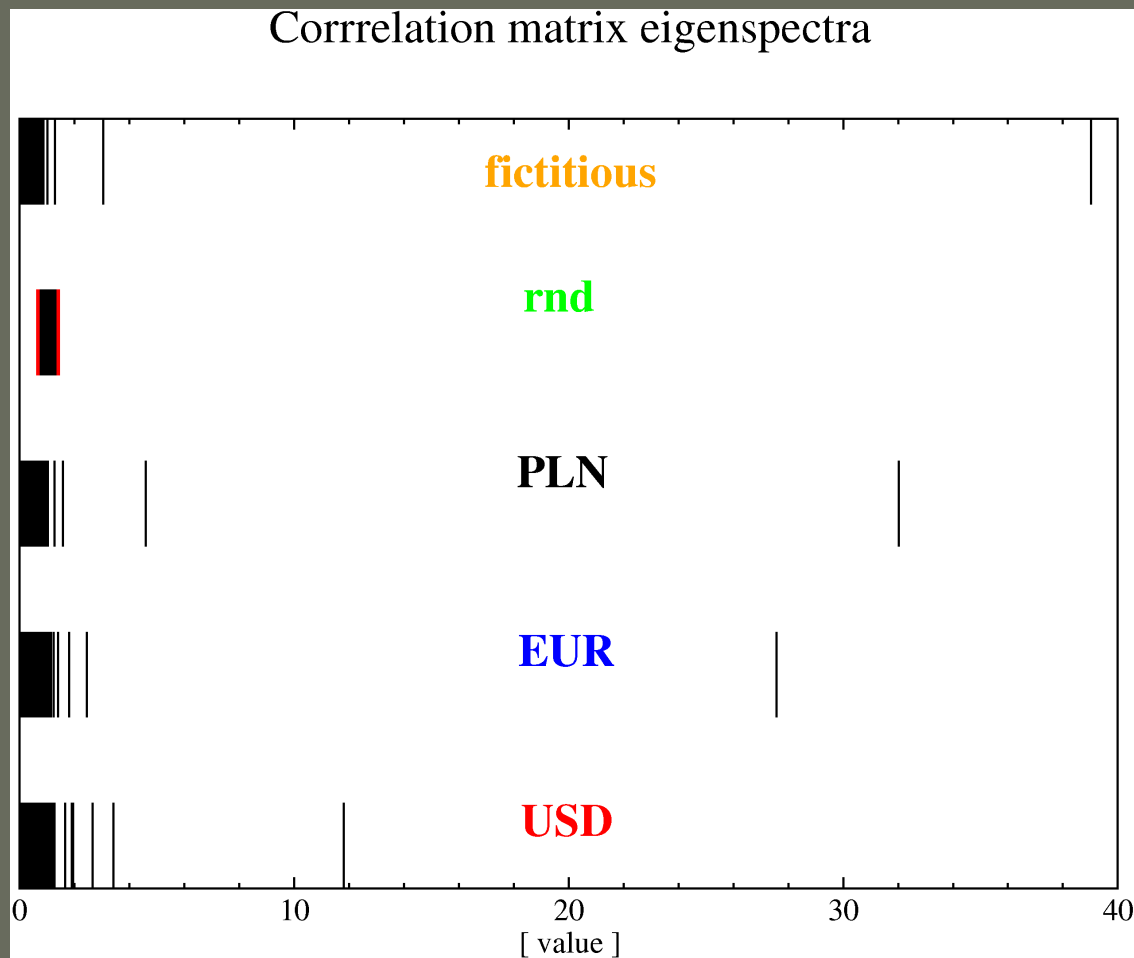
## SPEKTRUM MACIERZY KORELACJI (1)

Serie „tasowane”, nieskorelowane (**rnd**) znacznie różnią się od pozostałych!



## SPEKTRUM MACIERZY KORELACJI (2)

Waluta losowa nieskorelowana (**fictitious**) zachowuje się podobnie do walut słabych



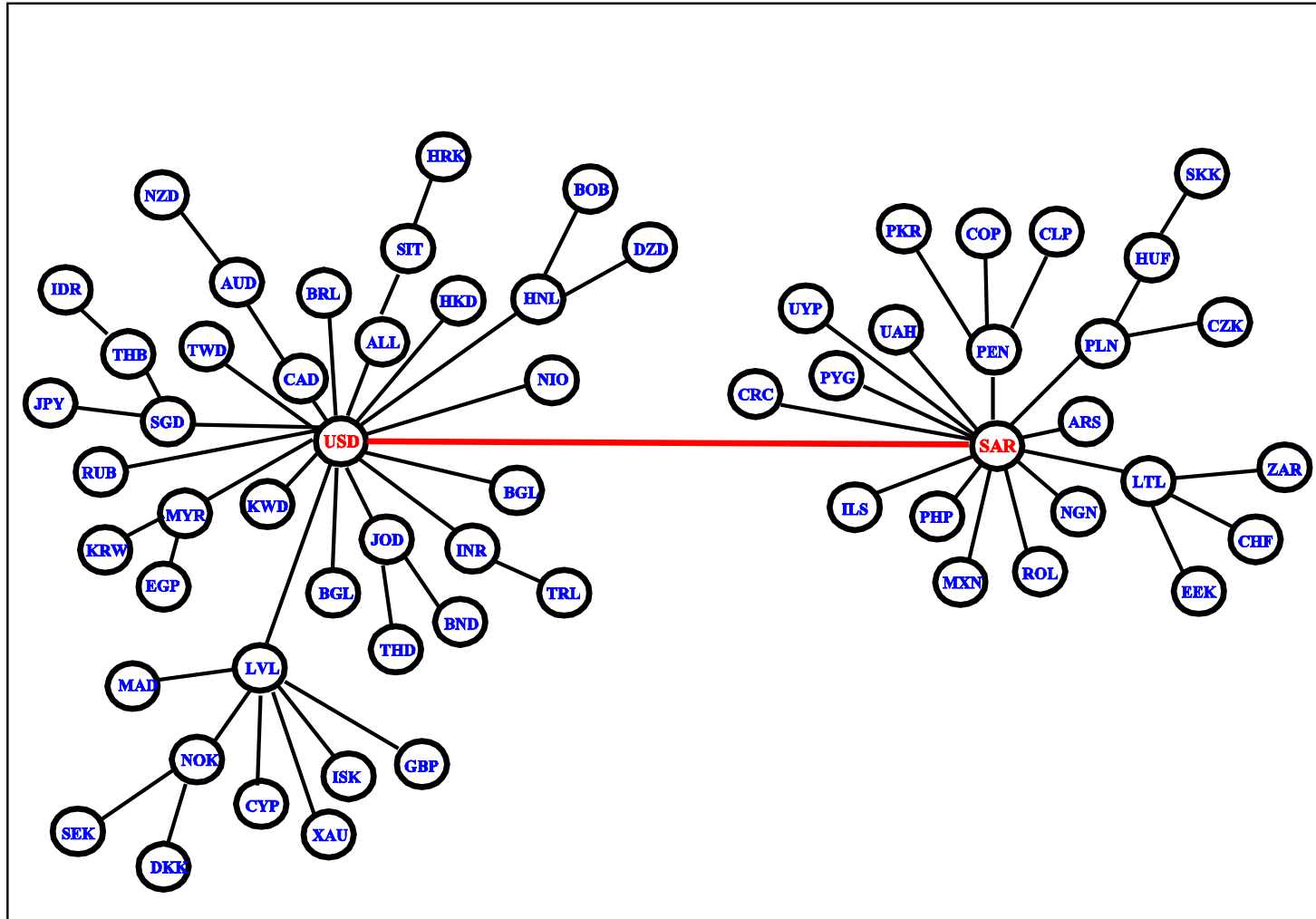
## GRAFY „Minimal Spanning Tree” (MST)

- ❑ macierze korelacji – wiele elementów ==> problem z wizualizacją;
- ❑ Wprowadzamy metrykę  $d_{ij}$ :

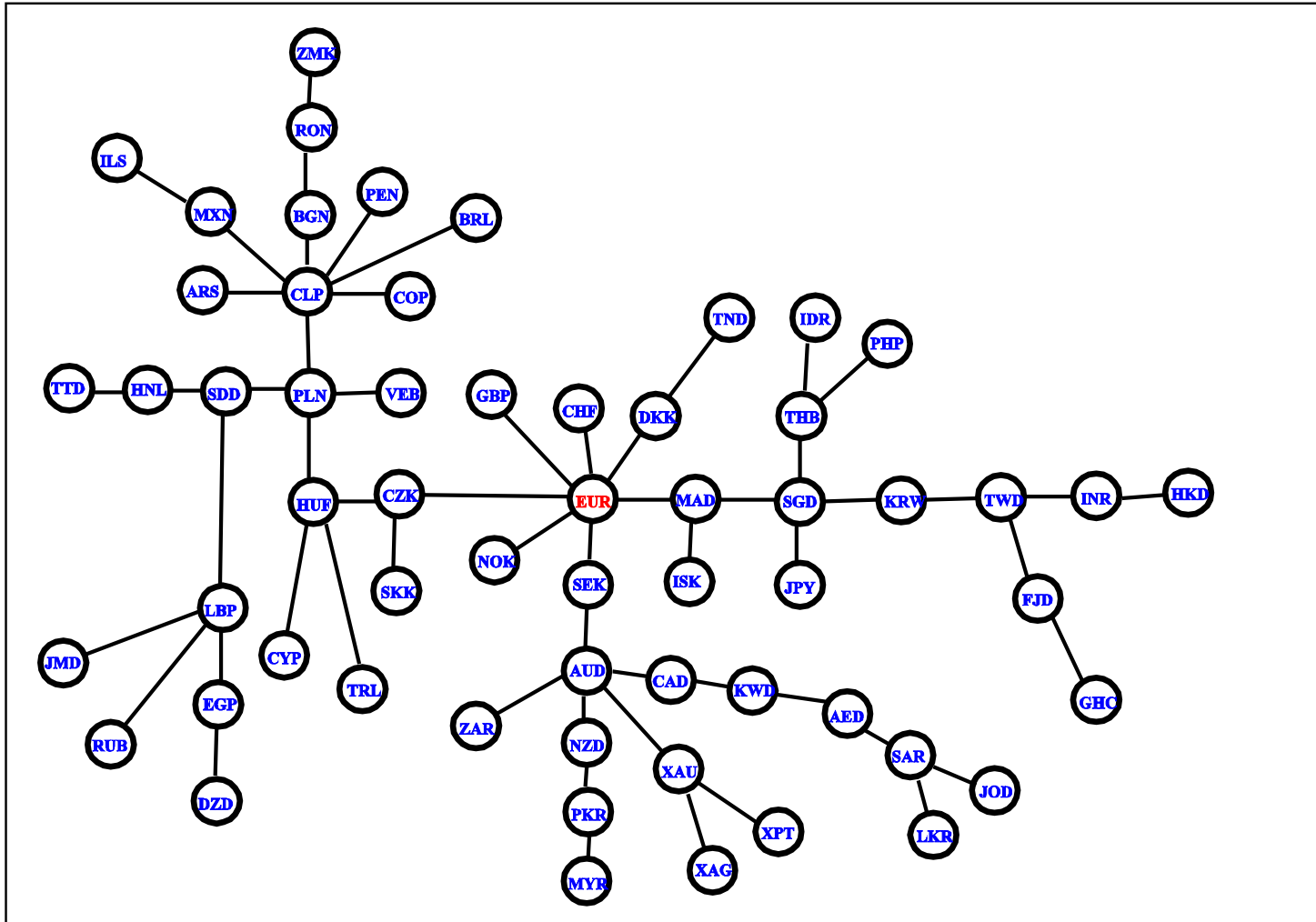
$$d_{ij} = \sqrt{2(C_{ij} - 1)} \quad (0 \leq d_{ij} \leq 2)$$

- ❑ algorytm konstrukcji grafu oparty na tej metryce;
- ❑ zastosowanie MST dla rynku akcji: Mantegna [*Eur. Phys. J.* **B11** (1999) 193]
- ❑ dla FX – EFEKT TRÓJKĄTA – można pokazać, że implikuje to  $(N-1)$  niezależnych notowań/zwrotów spośród  $N(N-1)$  możliwych;
- ❑ grafy wyrażane są dla serii o ustalonej walucie bazowej, co daje  $(N-1)$  węzłów;
- ❑ wybór waluty bazowej uwidacznia klastryzację „w języku” pozostałych walut;
- ❑ tasowanie serii wyraźnie zmienia strukturę grafu [Oxford group, *Phys. Rev.* 2005]

# In terms of EUR

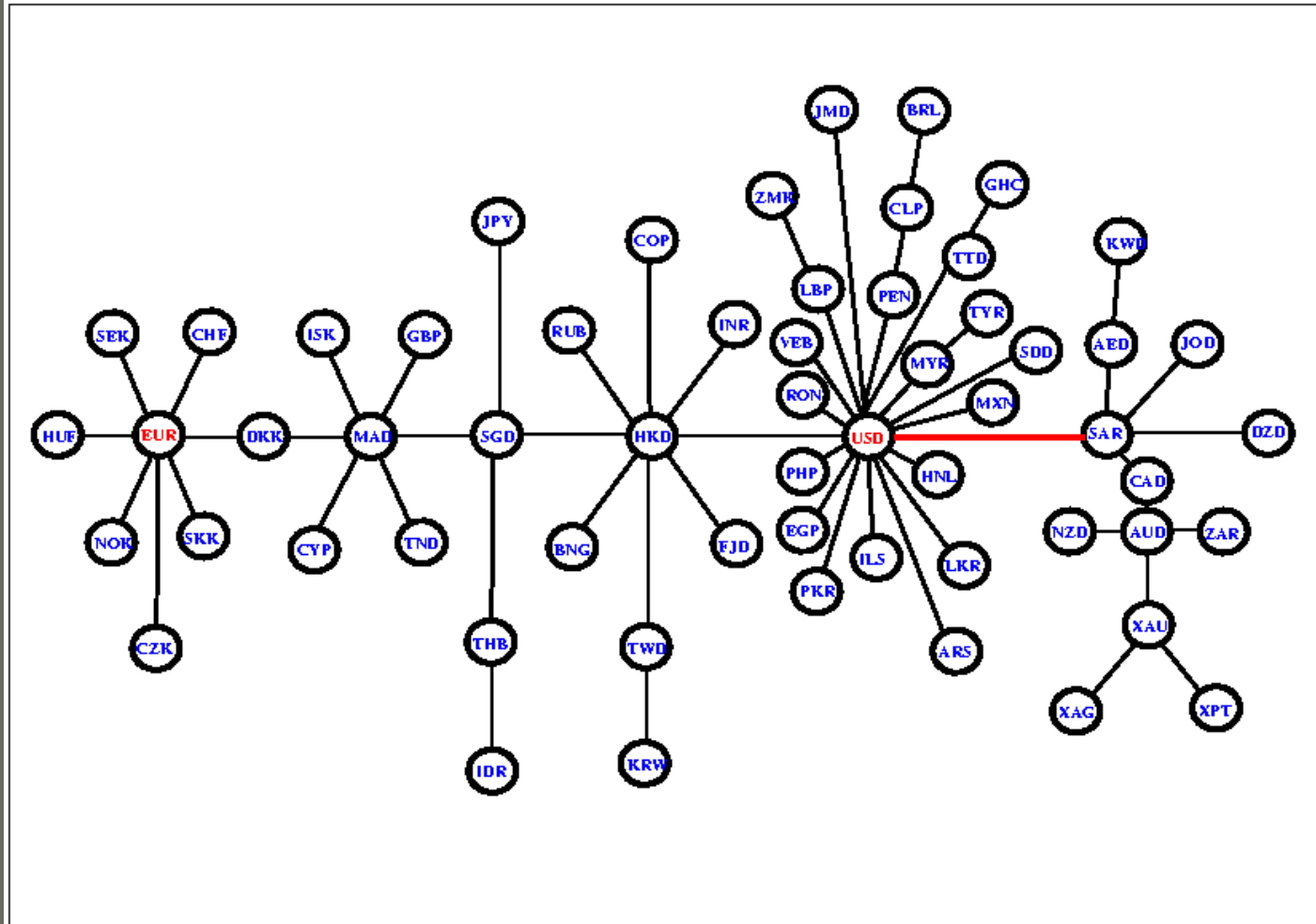


# In terms of USD

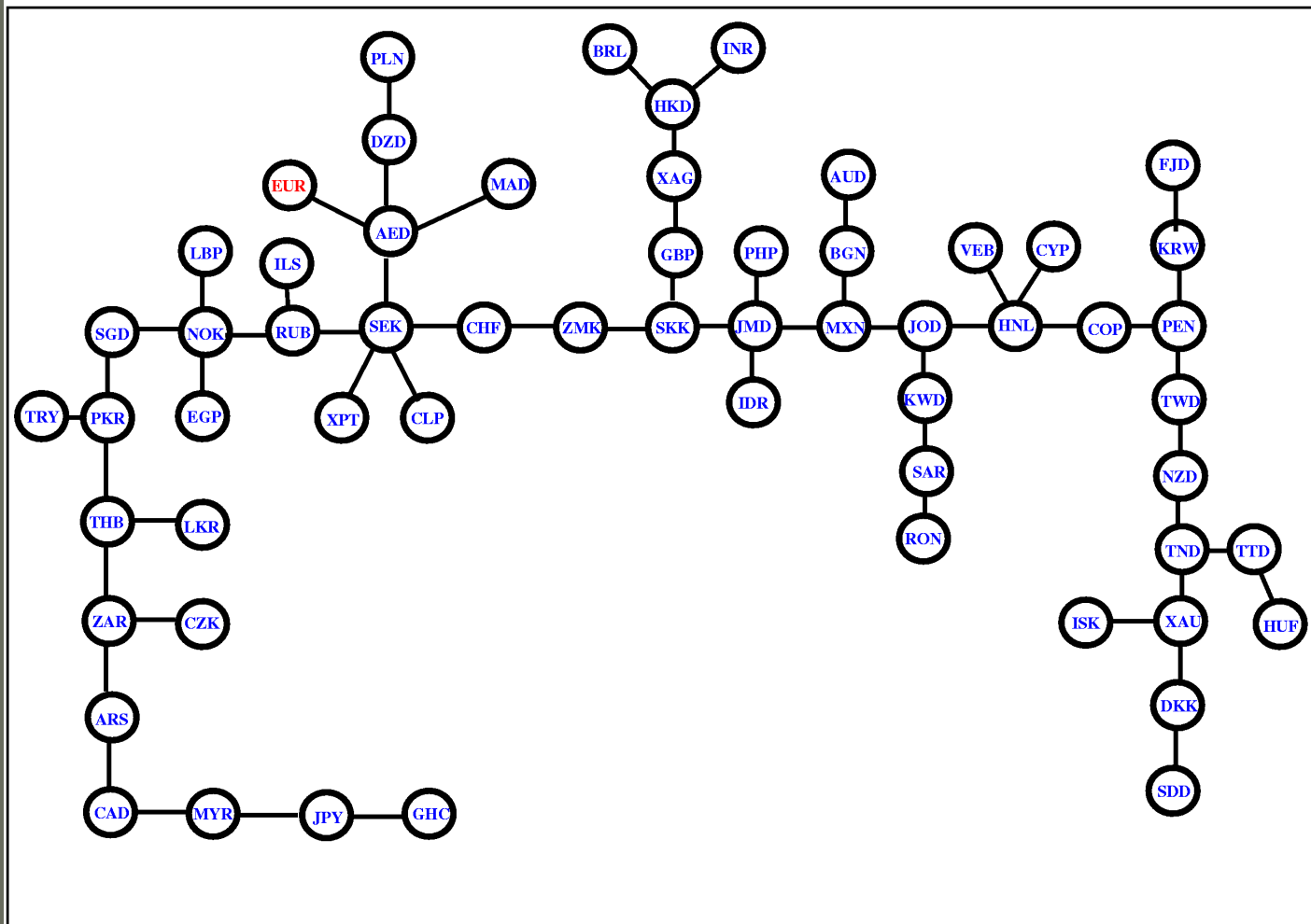


# Dwa rywalizujące klastry EUR i USD (PLN walutą bazową)

## In terms of PLN

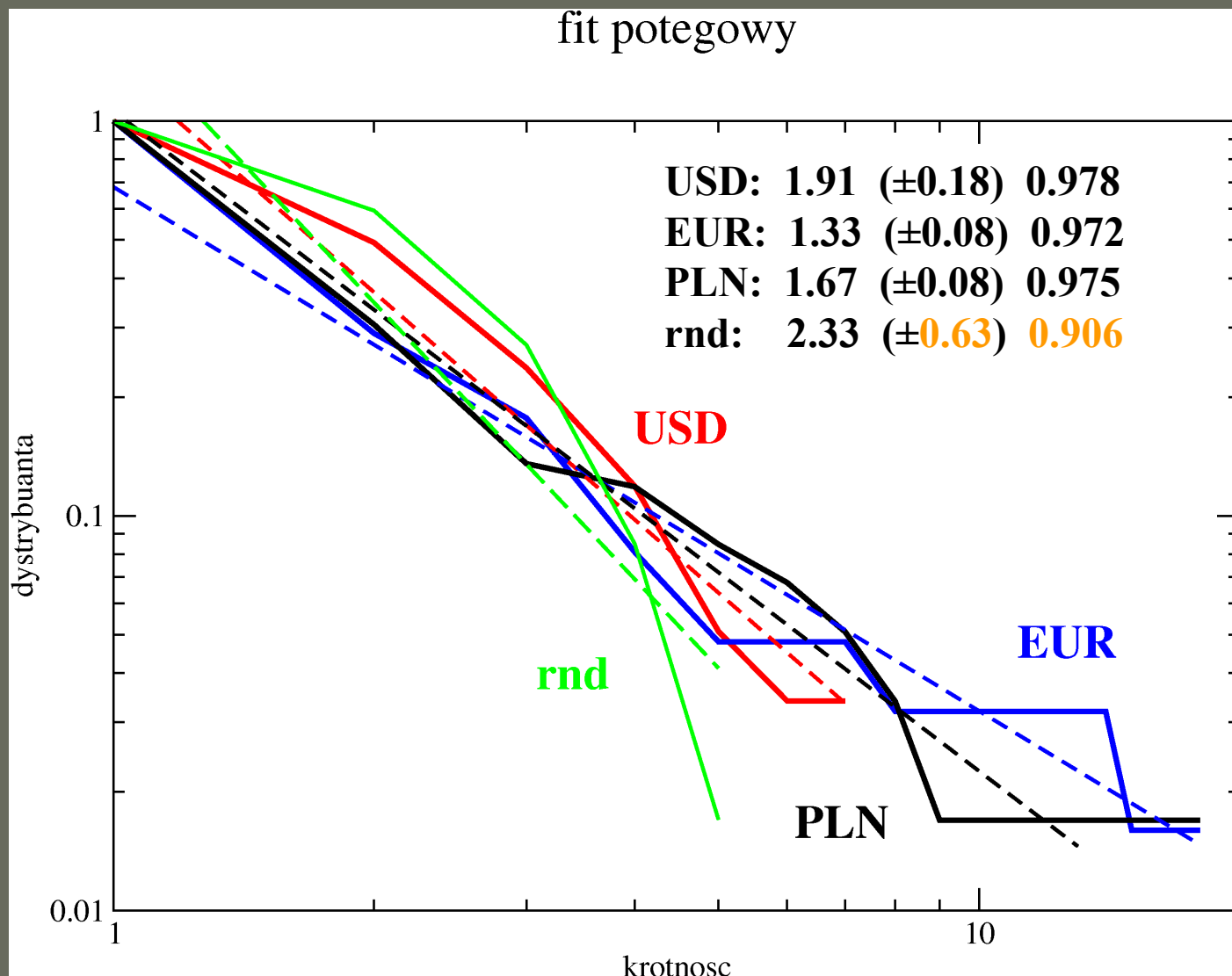


## random currencies





# Potęgowy rozkład krotności węzłów. Grubszy ogon dla EUR, cieńszy dla USD



## PODSUMOWANIE

- układy złożone traktować możemy jako sieci grafowa reprezentacja macierzy korelacji dla FX (MST)
- reguła trójkąta – dodatkowe więzy dla zwrotów
- spektrum m. korelacji: mody zerowe, kolektywność; tasowanie drastycznie zmienia spektrum; waluty słabe bliskie losowym
- widoczna klastryzacja wokół „silnych walut”
- potęgowe skalowanie krotności węzłów, wykładnik  $1 < \alpha < 2$
- dla fitów: -- kilkuprocentowe odchylenia standardowe
- -- współczynniki korelacji r-Pearsona  $> 0.97$