Value at Risk dla portfeli walutowych

Piotr Jaworski
Institute of Mathematics, Warsaw University
ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Poland
email: jwptxa@mimuw.edu.pl

Rozważamy portfel walutowy zawierający eura (EUR) i franki szwajcarskie (CHF). Oznaczmy przez R_1 i R_2 ich stopy zwrotu na koniec okresu inwestycyjnego. Będziemy je modelować jako zmienne losowe o ciągłym łącznym rozkładzie. Niech W_0 i W_1 oznaczają odpowiednio wartość portfela na początku i na końcu okresu inwestycyjnego, a $w = (w_1, w_2)$ skład „procentowy" portfela, $w_1 + w_2 = 1$, $w_1, w_2 > 0$.

$$W_1 = W_0 \cdot (1 + R), \quad R = w_1 R_1 + w_2 R_2.$$

VaR (Value at Risk, wartość narażona na ryzyko) dla poziomu ufności $1 - \alpha$ jest wyznaczony przez warunek

$$P(W_0 - W_1 \leq VaR_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

tzn. z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ strata nie przekroczy $VaR_{1-\alpha}$. Jeżeli przez Q_α oznaczymy kwantyl rozkładu R, to

$$VaR_{1-\alpha} = -W_0 Q_\alpha.$$

Skorzystamy z twierdzenia Sklara (1959) i opiszemy łączny rozkład stóp zwrotu R_1 i R_2 za pomocą kopuli C

$$P(R_1 \leq x_1, R_2 \leq x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

gdzie F_i dystrybuanta R_i.

Kopula C jest dystrybuantą łącznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych $F_1(R_1)$ i $F_2(R_2)$.

$$C : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1],$$

$$C(0,y) = C(x,0) = 0, \quad C(1,y) = y,\ C(x,1) = x,$$

$$x_1 < x_2, y_1 < y_2 \Rightarrow C(x_1,y_1) + C(x_2,y_2) - C(x_1,y_2) - C(x_2,y_1) \geq 0.$$

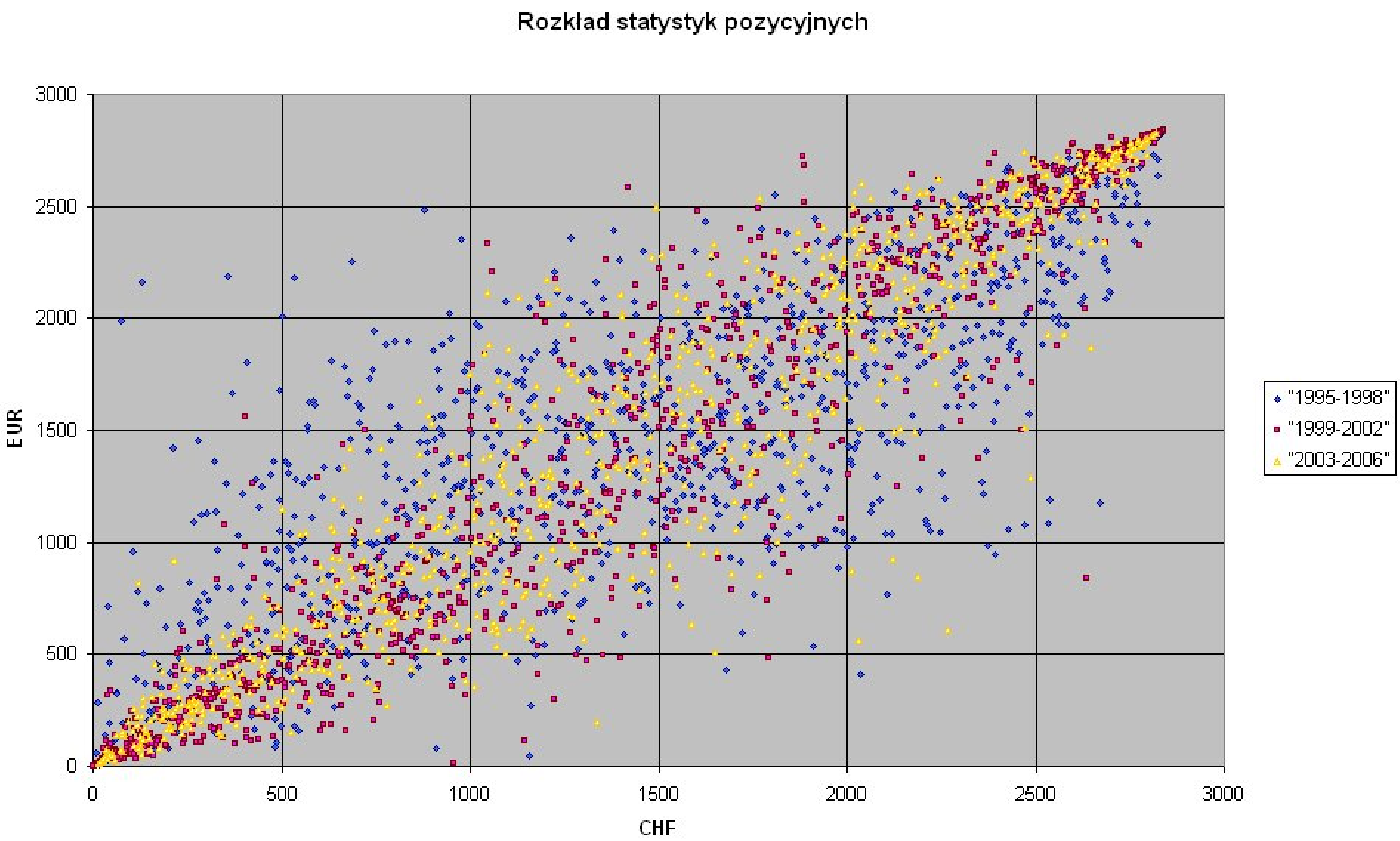
,,Fakty stylizowane'' dla kopuli zwrotów giełdowych:

Kopula C posiada jednorodny dolny ,,ogon''. A mianowicie, dla odpowiednio małych q_i

$$C(q_1, q_2) \approx L(q_1, q_2),$$

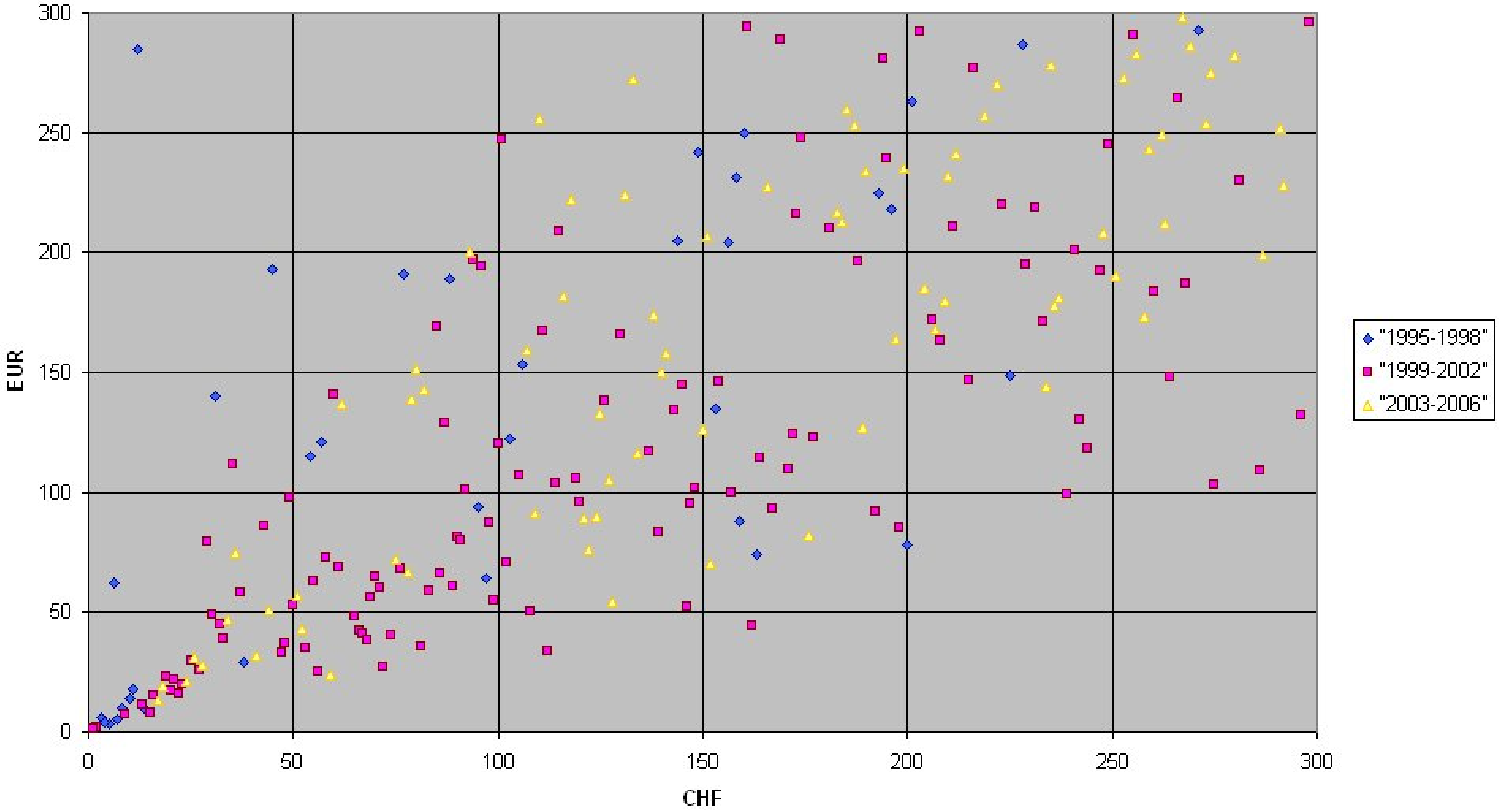
gdzie L pewna niezerowa dodatnio jednorodna funkcja

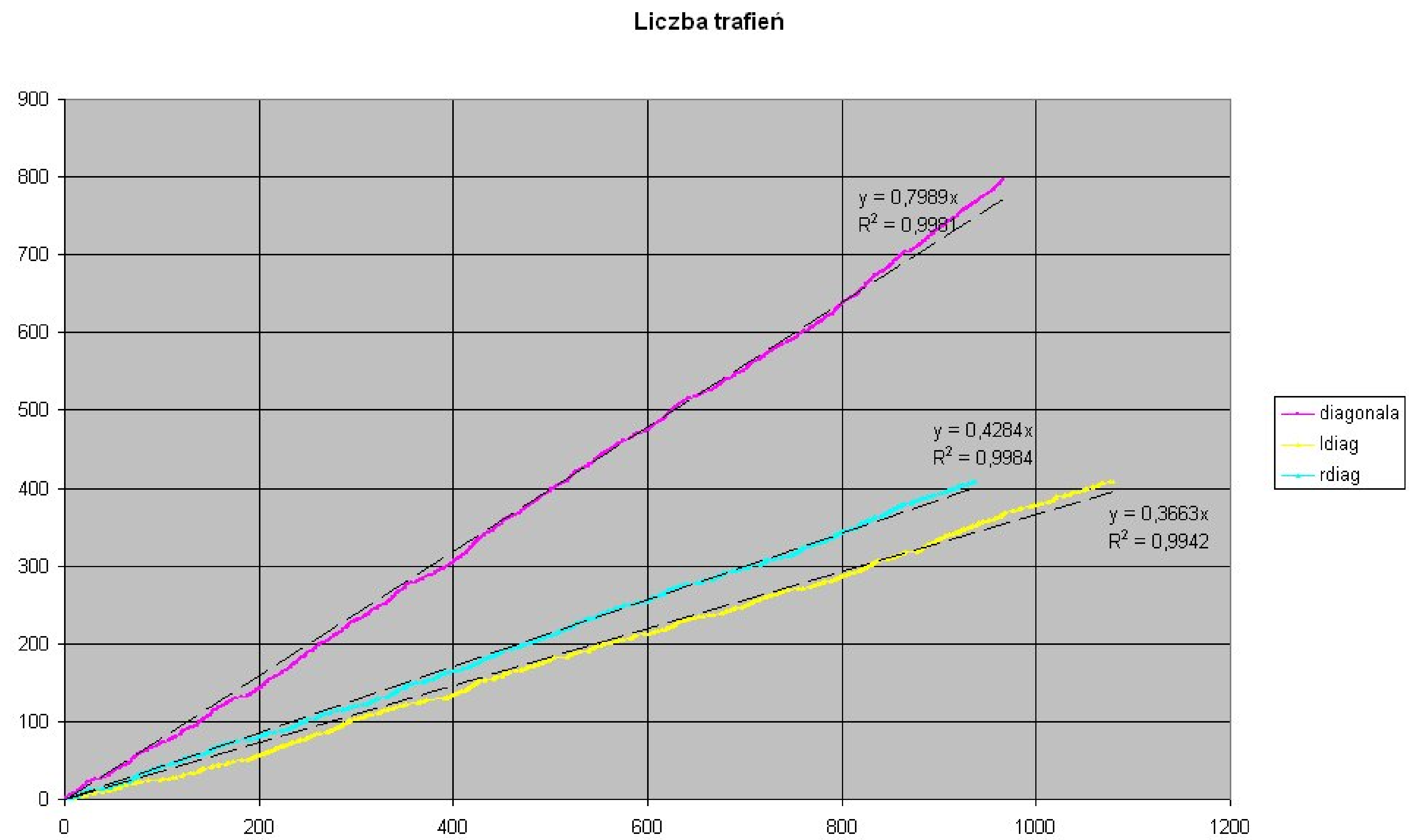
$$\forall t \geq 0 \quad L(tq_1, tq_2) = tL(q_1, q_2).$$



Rozkład statystyk pozycyjnych
EUR
CHF
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
"1995-1998"
"1999-2002"
"2003-2006"

Rozkład statystyk pozycyjnych




Liczba trafień
y = 0,7989x
R^2 = 0,9981
y = 0,4284x
R^2 = 0,9984
y = 0,3663x
R^2 = 0,9942
diagonala
ldiag
rdiag
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
200
400
600
800
1000
1200

Własności części głównej L:

- $0 \leq L(q_1, q_2) \leq min(q_1, q_2)$,

- L jest dystrybuantą pewnej miary μ_L na pierwszej ćwiartce

$$L(q_1, q_2) = \mu_L(\{(p_1, p_2) : 0 \leq p_1 \leq q_1,\ \ 0 \leq p_2 \leq q_2\}).$$

- L jest wklęsła.

$$P(R \leq r) = P(w_1 R_1 + w_2 R_2 \leq r) = \mu_C(V_r) \approx \mu_L(V_r),$$

gdzie

$$V_r = \{q : w_1 F_1^{-1}(q-1) + w_2 F_2^{-1}(q_2) \leq r\}.$$

Zbiór V_r jest ,,ograniczony'' przez dwa prostokąty

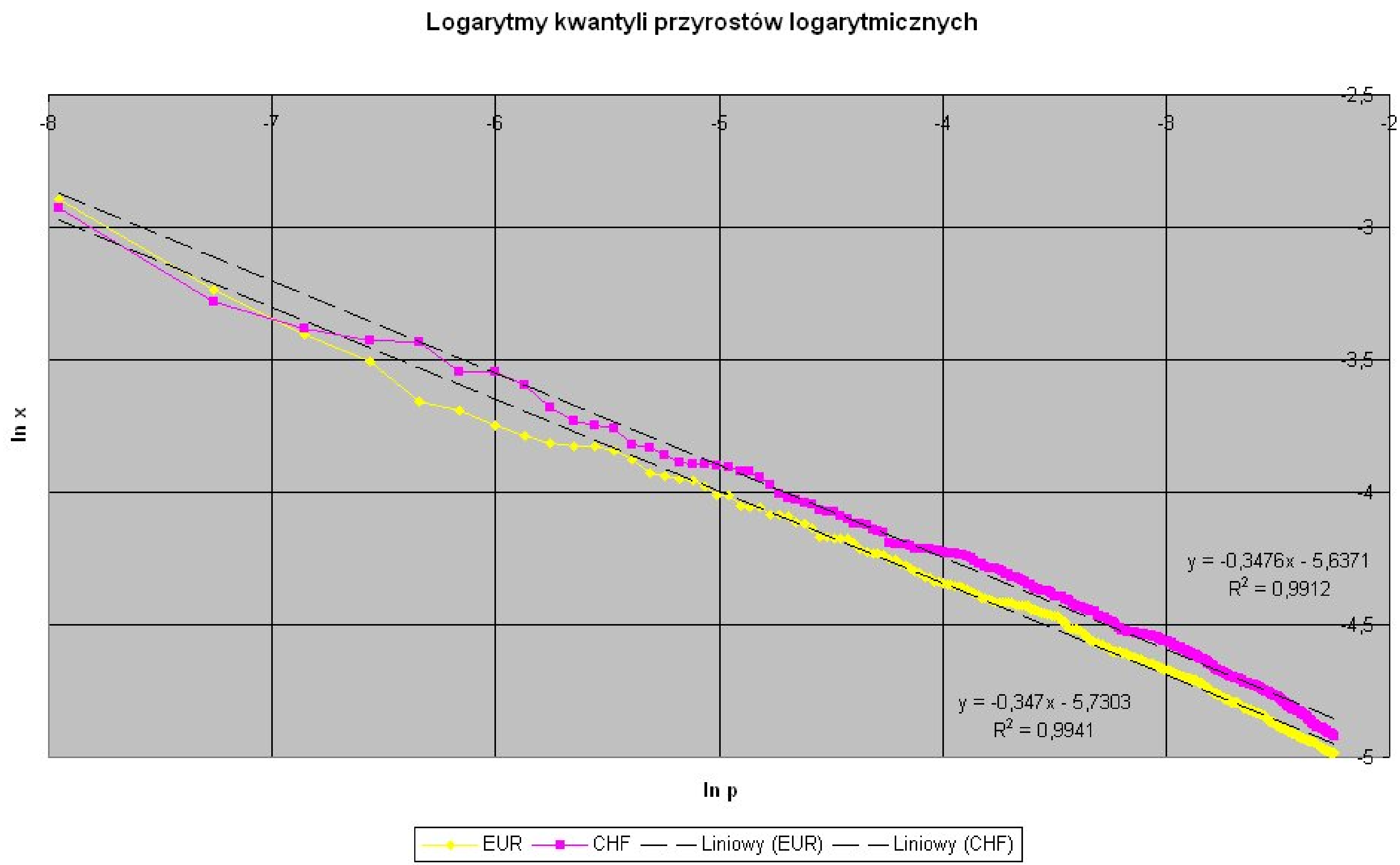
$$\{q : q_i \leq F_i(r)\} \subset V_r \subset \{q : q_i \leq F_i(\frac{1 + r - w_i}{w_i})\}.$$

,,Fakty stylizowane'' dla pojedynczych zwrotów giełdowych:

- Dla odpowiednio małych r $(-1 < r \ll 0)$

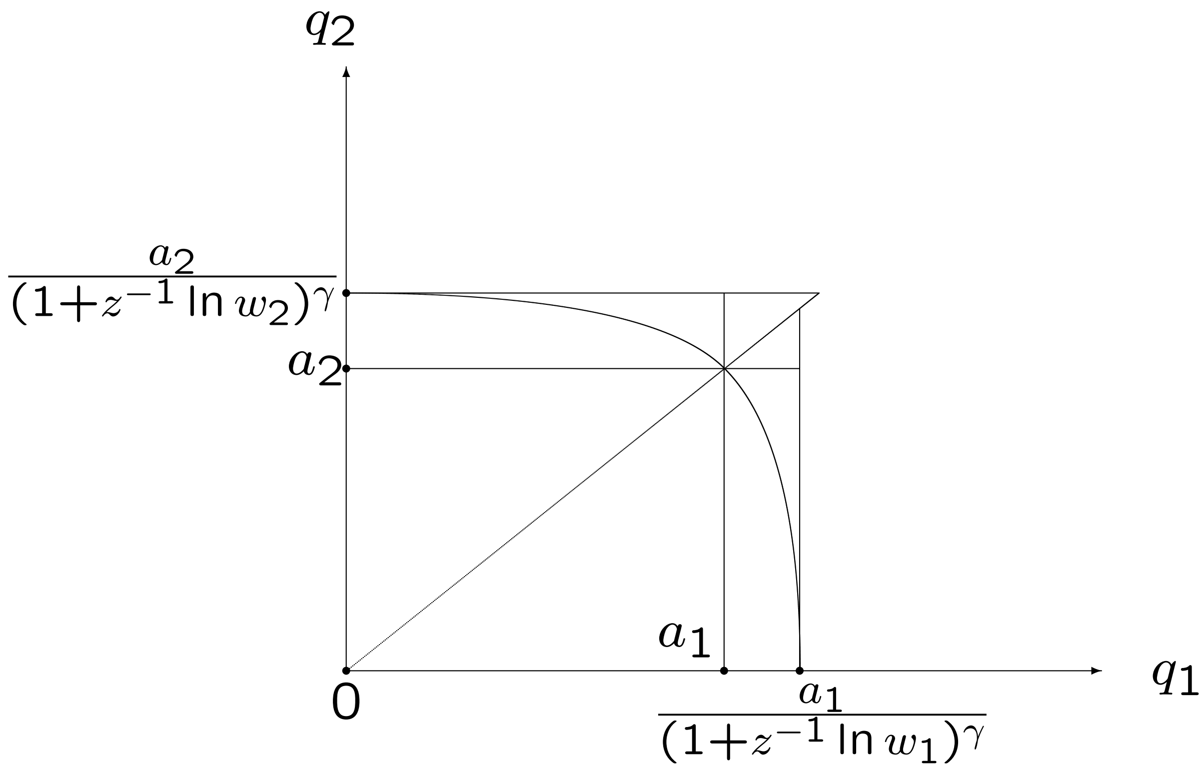
$$F_i(r) \approx a_i \cdot (-ln(1+r)^{-\gamma}, \quad i = 1, 2.$$

Innymi słowy zwroty logarytmiczne $(ln(1+R_i))$ mają potęgowe dolne ogony z tym samym indeksem γ.



Logarytmy kwantyli przyrostów logarytmicznych
ln x
ln p
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-2,5
-3
-3,5
-4
-4,5
-5
y = -0,3476x - 5,6371
R^2 = 0,9912
y = -0,347x - 5,7303
R^2 = 0,9941
EUR
CHF
Liniowy (EUR)
Liniowy (CHF)

V_r pomnożone przez z^γ, gdzie $z = -ln(1 + r)$.



Twierdzenie 1 *Dla odpowiednio małych* r $(-1 < r \ll 0)$ *i dodatnio jednorodnych funkcji* L_1 *i* L_2*, które spełniają warunki ze strony 7*

$$\forall q \quad L_1(q) \geq L_2(q) \Rightarrow \mu_{L_1}(V_r) \geq \mu_{L_2}(V_r).$$

Biorąc pod uwagę, że część główna L spełnia następujące oszacowania

$$min(q_1, q_2) \geq L(q_1, q_2) \geq L(1,1)min(q_1, q_2)$$

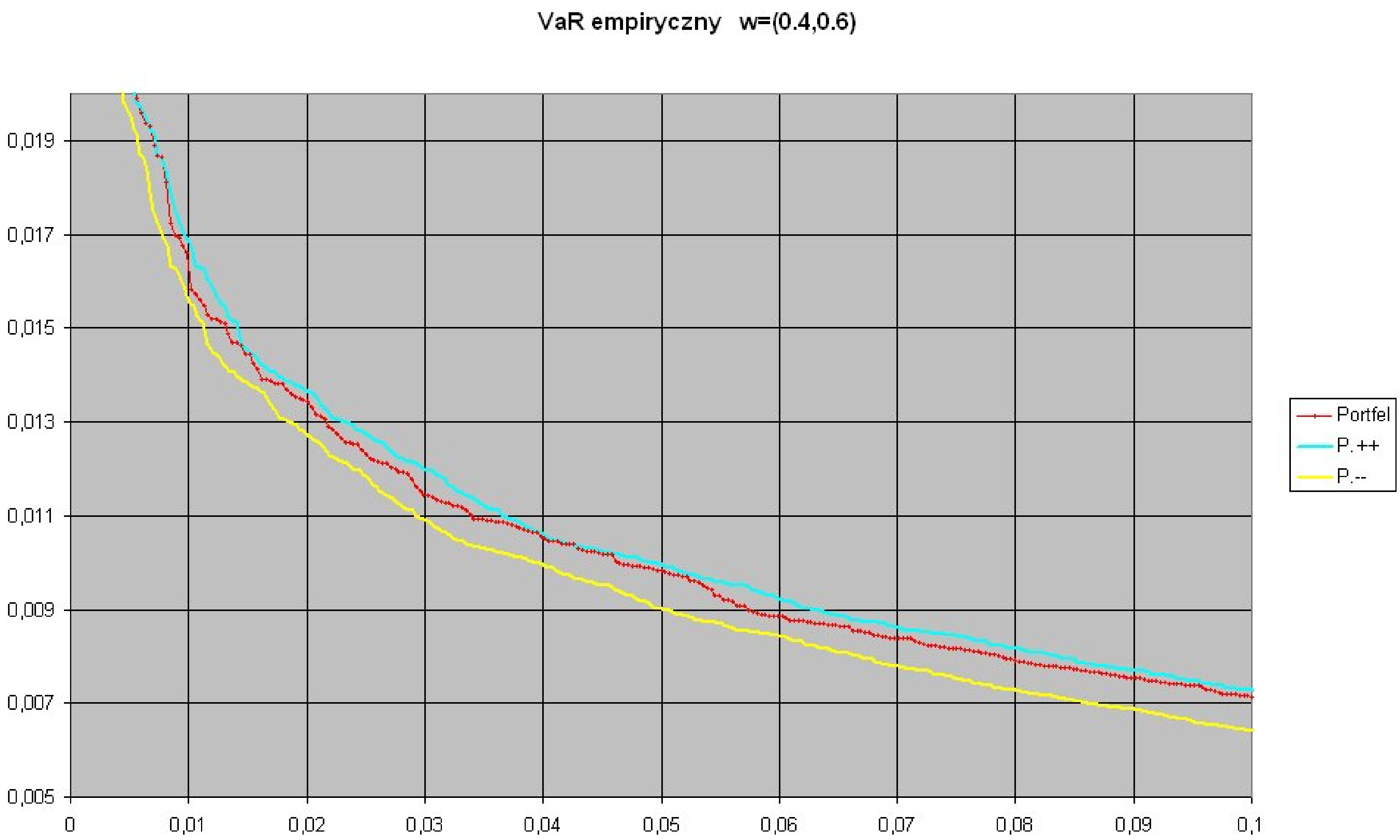
otrzymujemy:

$$w_1 VaR_{1-\alpha}(R_1) + w_2 VaR_{1-\alpha}(R_2) \geq VaR_{1-\alpha}(R) \geq$$

$$\geq w_1 VaR_{1-\alpha_*}(R_1) + w_2 VaR_{1-\alpha_*}(R_2),$$

gdzie $\alpha_* = \frac{\alpha}{L(1,1)}$.

$L(1,1)$ wyestymowane na podstawie zwrotów EUR:PLN i CHF:PLN wynosi 0.7989.


VaR empiryczny w=(0.4,0.6)
0,019
0,017
0,015
0,013
0,011
0,009
0,007
0,005
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
0,06
0,07
0,08
0,09
0,1
Portfel
P.++
P.--

VaR empiryczny w=(0.4,0.6)