

Voter model on Sierpiński fractals
Model głoszący na fraktalach
Sierpińskiego

Krzysztof Suchecki

Janusz A. Hołyst

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej

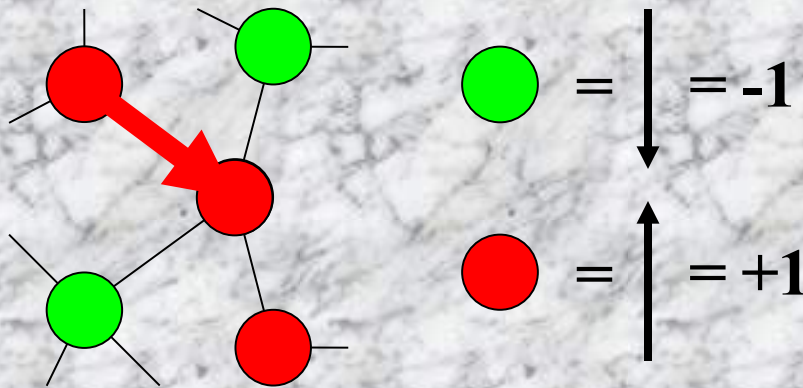
Plan

- Model głoszący : definicja i własności
- Jak zachowuje się w sieciach regularnych
- Sieci fraktalne: dywan i trójkąt Sierpińskiego
- Wielkie pytanie (motywacja)
- Nasze wyniki
- I co można z nich wywnioskować

Model głoszący

Bardzo uproszczony model zachowania się opinii.

Każdy węzeł sieci - agent posiadający opinię σ_i



Zasada: przyjmowanie opinii losowego sąsiada

Asynchroniczna dynamika :

Wybieramy węzeł losowo.

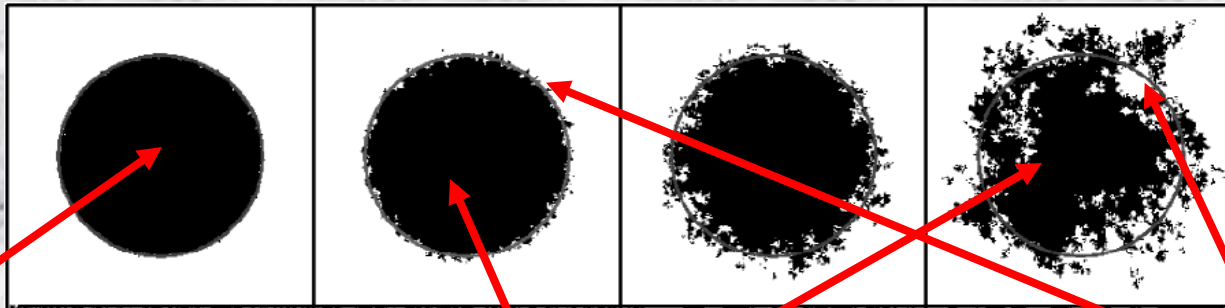
1 krok czasowy = N kroków dynamiki dla poszczególnych węzłów (N-ilość węzłów w sieci)

Model głoszący

Model głoszący ma parę ważnych własności:

Przykładowa dynamika modelu w sieci 2 wymiarowej

“Critical Coarsening without Surface Tension: The Universality Class of the Voter Model”, Ivan Dornic, Hugues Chaté, Jérôme Chave, and Haye Hinrichsen, Phys. Rev. Lett. 87, 045701 (2001)



Temperatura 0 :wewnątrz
“czarnej” domeny nie pojawia
się opinia “biała”

Zachowanie spinu: objętość
“czarnej” domeny pozostaje
w średnio stała

Brak napięcia
powierzchniowego:zak
rzywienie powierzchni
nie determinuje
ewolucji

Model głoszący

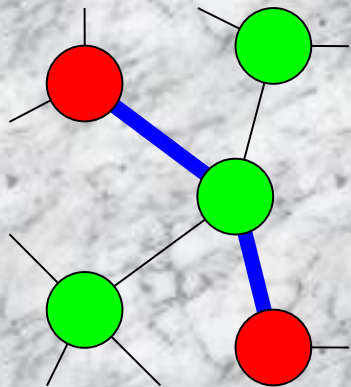
Dynamika

Porządkowanie

Nieporządek

System się porządkuje, domeny opinii rosną

System pozostaje się nie porządkuje. Nie powstają duże domeny, minimalny zasięg korelacji



Interfejsy - połączenia między odmiennymi opiniami

Miara porządku w układzie.

Gęstość interfejsów:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j \in K_i} \frac{1 - \sigma_i \sigma_j}{2}}{\sum_{i=1}^N k_i}$$

Ilość skierowanych interfejsów

Całkowita ilość skierowanych połączeń.

Model głośujący

Dynamika zależy od wymiarowości.

1D

Porządkowanie

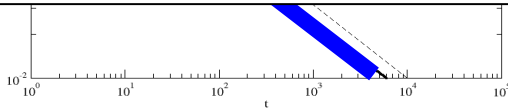
2D

Krytyczne porządkowanie

3+D

Nieporządek

Fluktuacje w skończonym systemie zawsze uporządkują system, z **wykładniczym zanikiem** gęstości interfejsów gdy wyniki uśrednione są po dużej liczbie sieci (z uwzględnieniem sieci które się całkowicie już uporządkowały). Charakterystyczny czas zależy od wielkości sieci.



Hugues Chaté, Jérôme Chave, and Hays Hinrichsen,
Phys. Rev. Lett. 87, 045701 (2001)

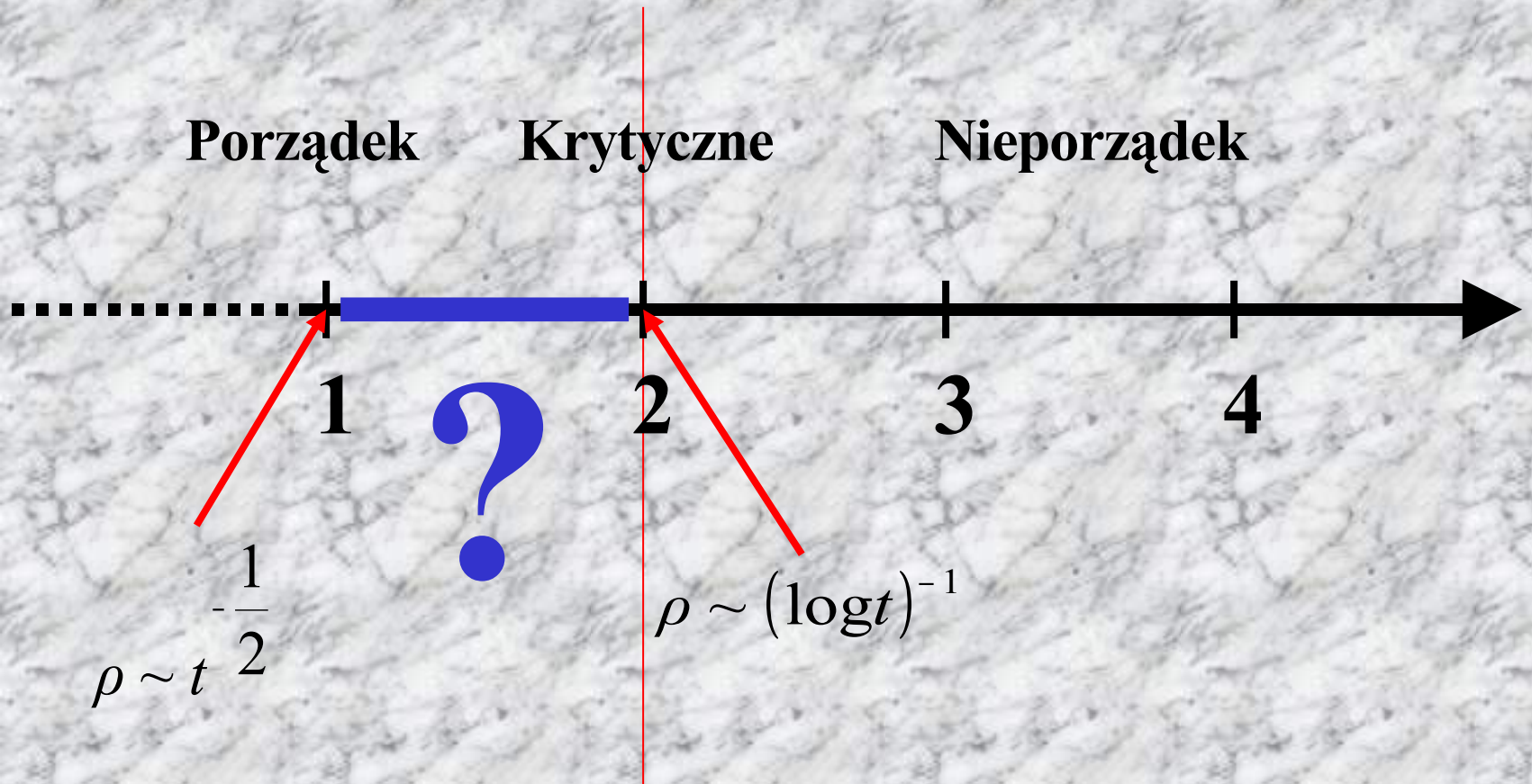
$$\rho \sim \text{const.}$$

$$\rho \sim (\log t)^{-1}$$

Na czerwono są analityczne wzory Frachenbourg'a i Krapivsky'ego dla **granicy nieskończonego czasu**.

L.Frachenbourg, P.L.Krapivsky, "Exact results for kinetics of catalytic reactions", Phys. Rev. E 53, 3009 (1996)

Wielkie pytanie



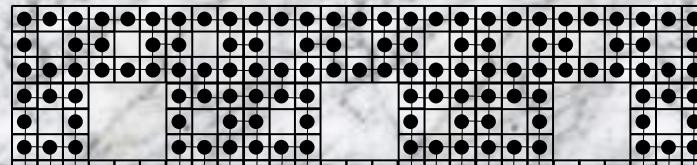
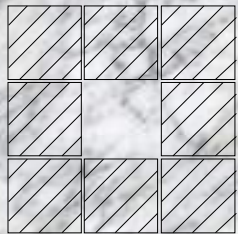
Jak model zbliża się do punktu krytycznego ?

Czy zachowuje się na fraktalach inaczej niż na sieciach regularnych ?

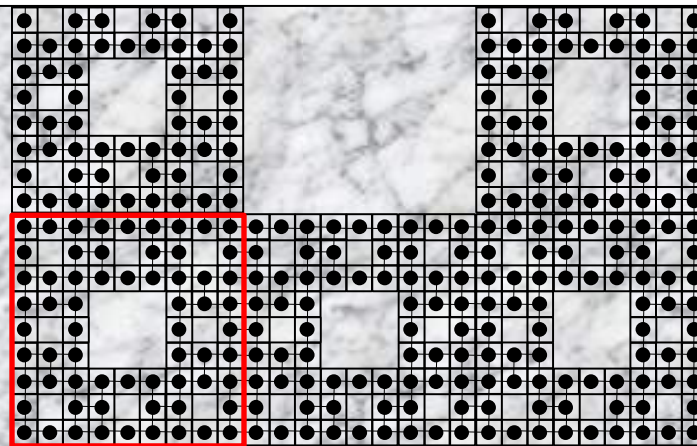
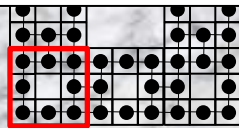
Fraktale Sierpińskiego

Dywan Sierpińskiego

Podstawowy wzór



Wymiar fraktalny $D = \ln 8 / \ln 3 \approx 1.893$



3 stopień fraktala

Wyższe stopnie 

Rozgałęzienie:

ilość połączeń które trzeba usunąć aby odseparować dowolnie duży kawałek nieskończonego fraktala

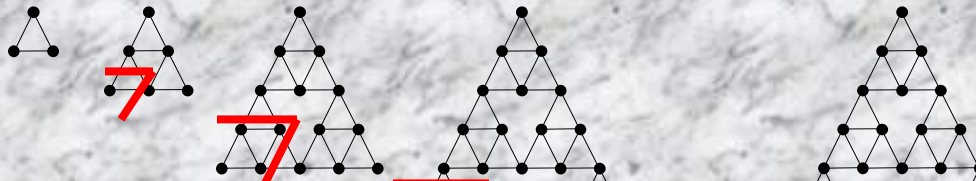
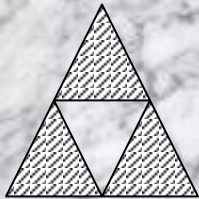
Sieci uzyskane w poprzednim stopniu układamy w nasz wzór, otrzymując kolejny stopień tworzenia fraktala.

Ilość przeciętych połączeń rośnie w nieskończoność - Rozgałęzienie $R = +\infty$

Fraktale Sierpińskiego

Trójkąt Sierpińskiego

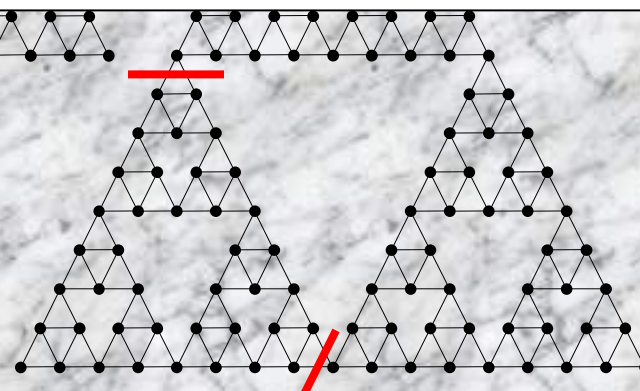
Podstawowy wzór



Wyższe
stopnie

Wymiar fraktalny $D = \ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$

Kolejny stopień składa się z sieci
niższego stopnia ułożonych w
podstawowy wzór.



4 stopień fraktala

Ilość połączeń do przecięcia stała - Rozgałęzienie $R = 4$

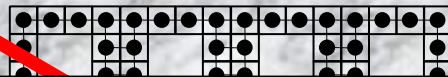
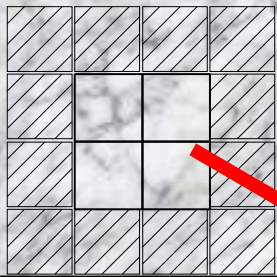
Fraktale Sierpińskiego

Uogólniony dywan sierpnińskiego

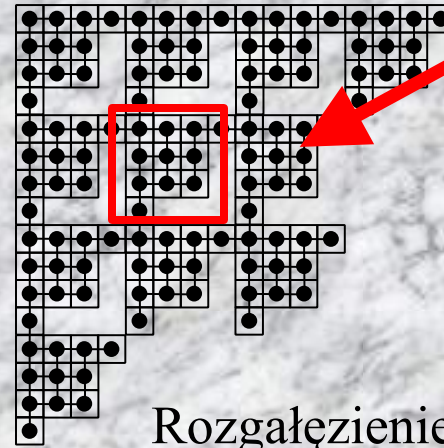
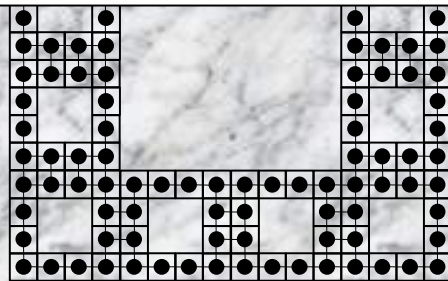
Dywan sierpnińskiego można łatwo uogólnić na dowolny wzór kwadratowy...

Pozwalając uzyskać różne wymiary fraktalne...

...lub skończone Rozgałęzienie



Wymiar fraktalny $D = \ln 12 / \ln 4 \approx 1.792$

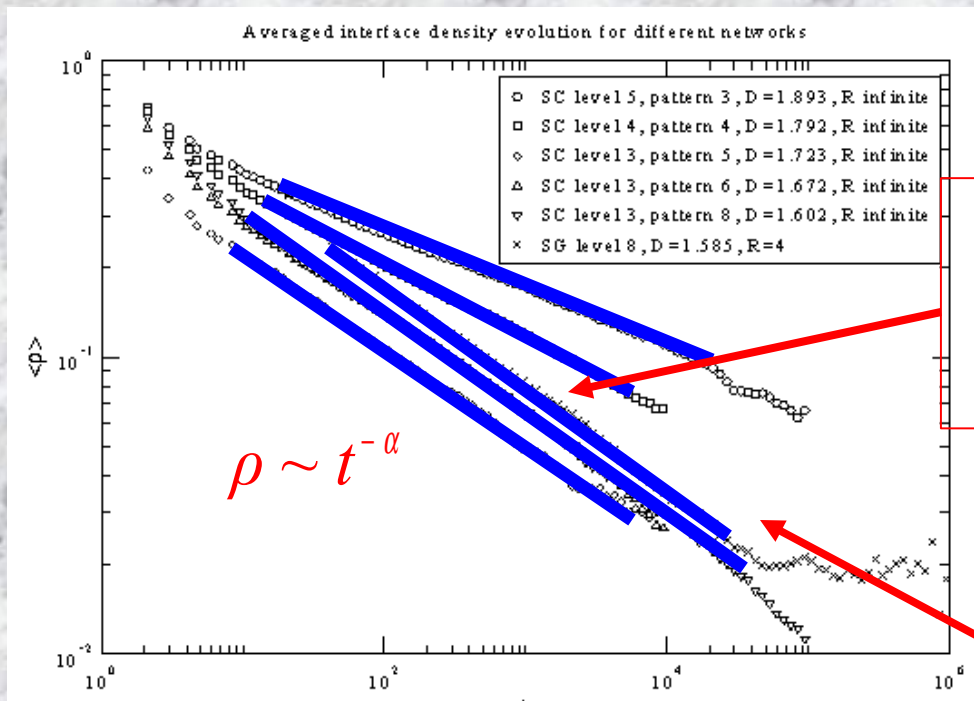


Rozgałęzienie $R = 4$

Nasze wyniki

Ewolucja gęstości interfejsów -system się porządkuje, zgodnie z oczekiwaniami dla wymiaru poniżej wartości krytycznej 2

Dywany Sierpińskiego z różnymi wymiarami fraktalnymi. System porządkuje się podobnie jak 1 wymiarowy ale z innymi wykładnikami.

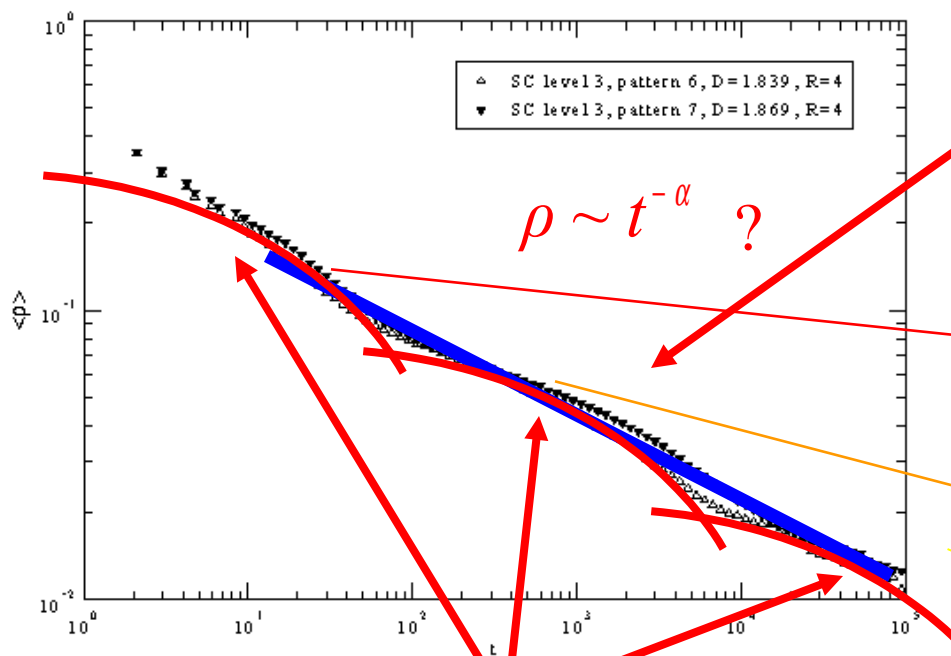


Model głosujący działa jak dla sieci regularnej, ale z ułamkowym wymiarem

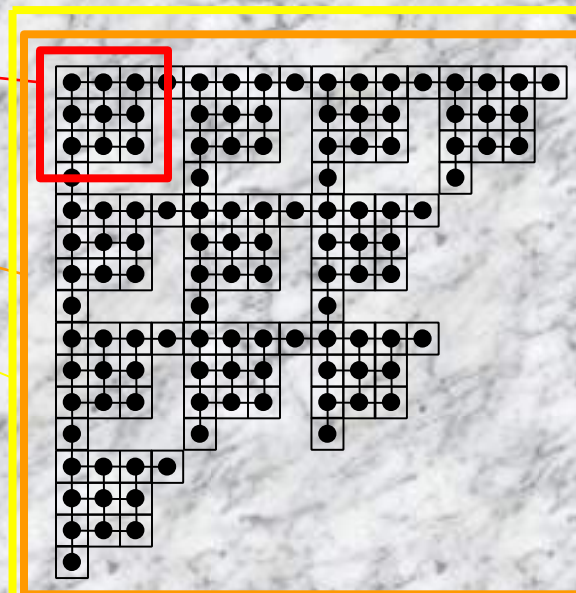
Wszystkie dywany mają nieskończone rozgałęzienie

Nasze wyniki

Dywany sierpińskiego ze skończonym rozgałęzieniem. Dynamika wygląda na pozór podobnie, ale obecność oscylacji świadczy o innym mechanizmie porządkowania.



Zanik wykładniczy -
porządkowanie się skończonych
modułów w danej skali



Porządkowanie modułów oddzielonych
“wąskimi gardłami” w różnych skalach

Nasze wyniki

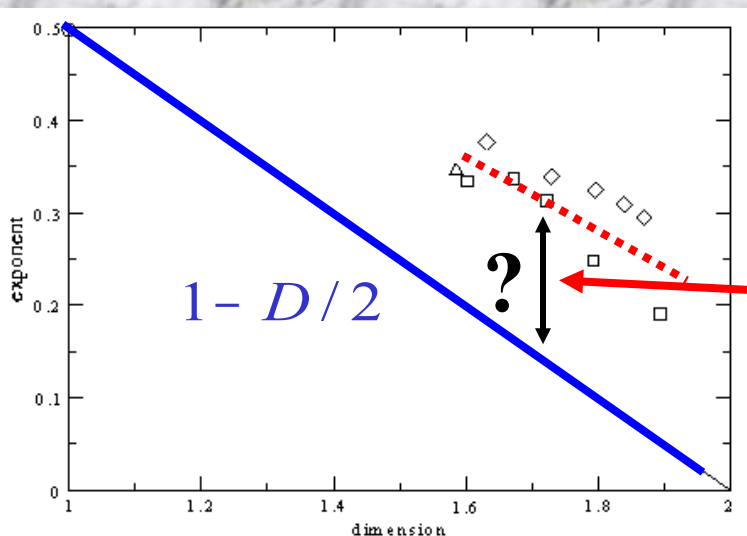
Zależność wykładnika od wymiaru. Frachenbourg i Krapivsky określili analityczne wyniki dla porządkowania. Pomimo rozpatrywania sieci regularnych kwadratowych, wyniki dane są dla $D < 2$, $D = 2$ i $D > 2$. Dla

$D < 2$ mamy następujący wzór:

$$\rho \sim t^{-1+D/2}$$

L.Frachenbourg, P.L.Krapivsky, "Exact results for kinetics of catalytic reactions", Phys. Rev. E 53, 3009 (1996)

Sprawdzamy czy zależność ta jest prawdziwa dla sieci fraktalnych.



Możliwa rozbieżność wynikać może ze skończoności fraktali i czasu symulacji. Wyniki analityczne są dla nieskończonej sieci i czasu.

Wnioski

- Dynamika modelu głosującego na sieciach fraktalnych o nieskończonym rozgałęzieniu jest analogiczna do sieci regularnych
- Dla fraktali ze skończonym rozgałęzieniem mechanizm porządkowania jest zupełnie inny
- Wyniki analityczne dla sieci regularnych nie dają się łatwo rozszerzyć na sieci fraktalne tak by dawały rezultaty zgodne z numeryką