Modelowanie sieci złożonych

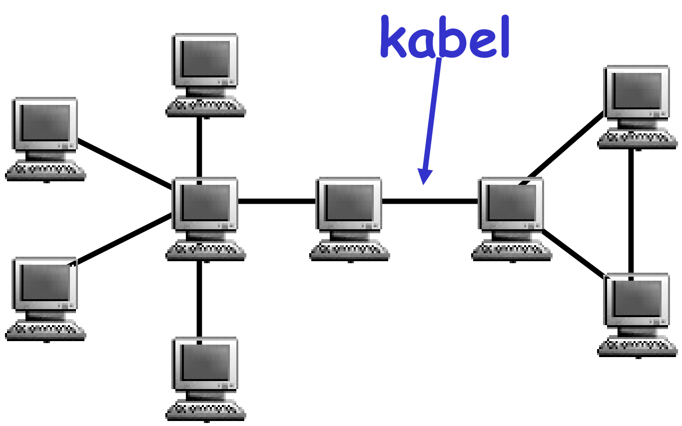
B. Wacław

Instytut Fizyki UJ

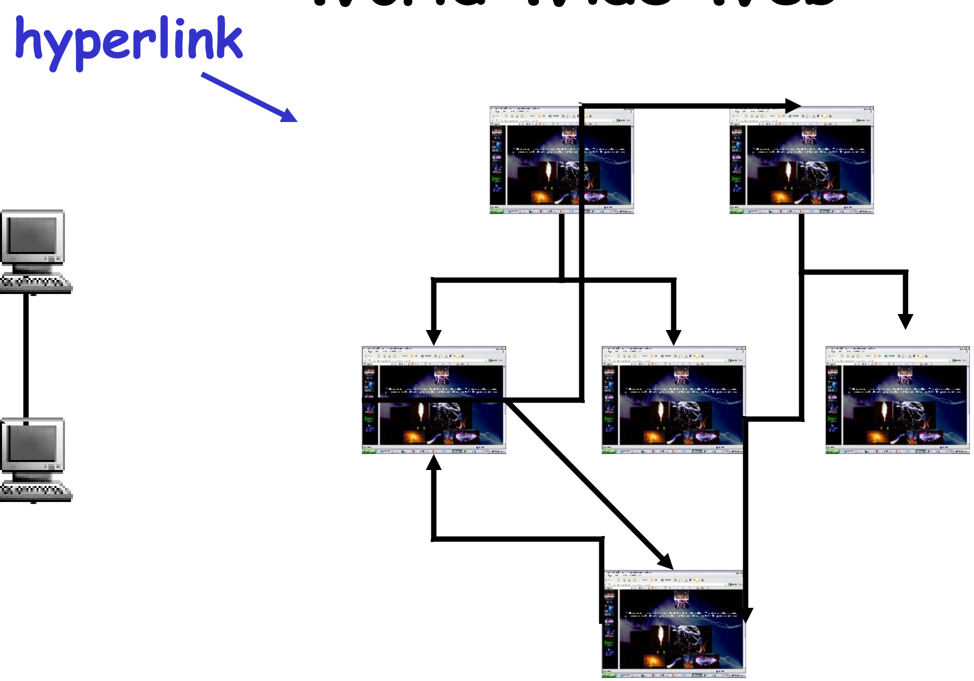
Czym są sieci złożone?

- wiele układów ma strukturę sieci: Internet, WWW, sieć cytowań, sieci komunikacyjne, społeczne itd.
- sieć = graf: węzły połączone linkami (krawędzie grafu)

Internet



World Wide Web

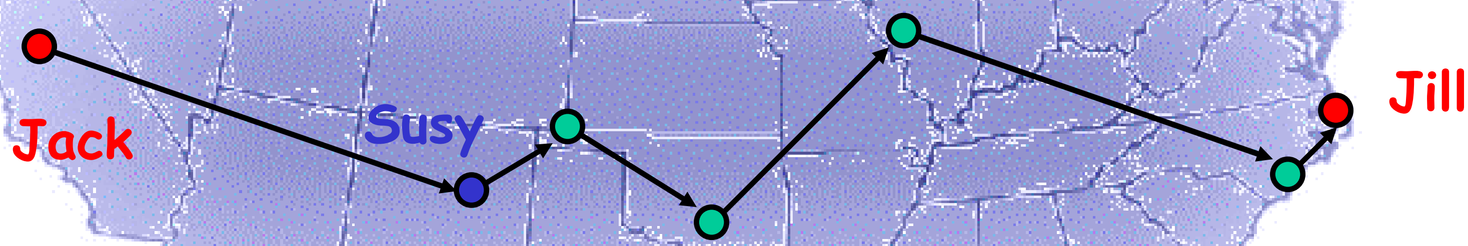


Nieco historii

- teoria grafów jako gałąź matematyki (Euler, XVIII wiek)

∀ ≈1930 – zastosowanie w socjologii

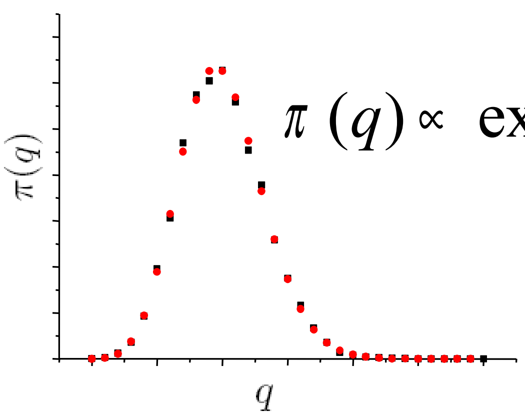
- XX wiek, lata 60 – eksperyment S. Milgrama



≈6 degrees of separation – **„small world"**

- 1999-2000 – badania WWW i Internetu (Barabási i inni)

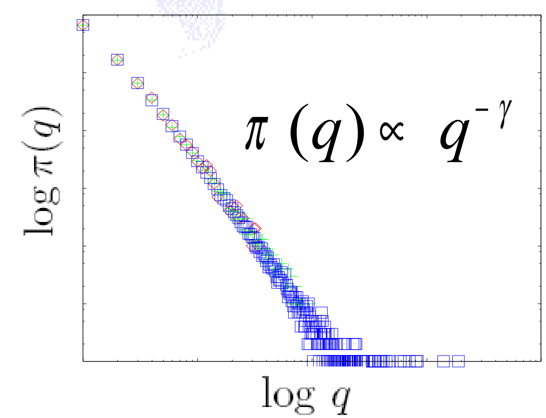
Rozkład krotności $\pi(q)$ daje prawdopodobieństwo, że losowo wybrany węzeł ma q sąsiadów



$$\pi(q) \propto \exp(-q)$$

graf przypadkowy

Większość sieci rzeczywistych jest **bezskalowych** (scale-free, SF)



$$\pi(q) \propto q^{-\gamma}$$

graf SF

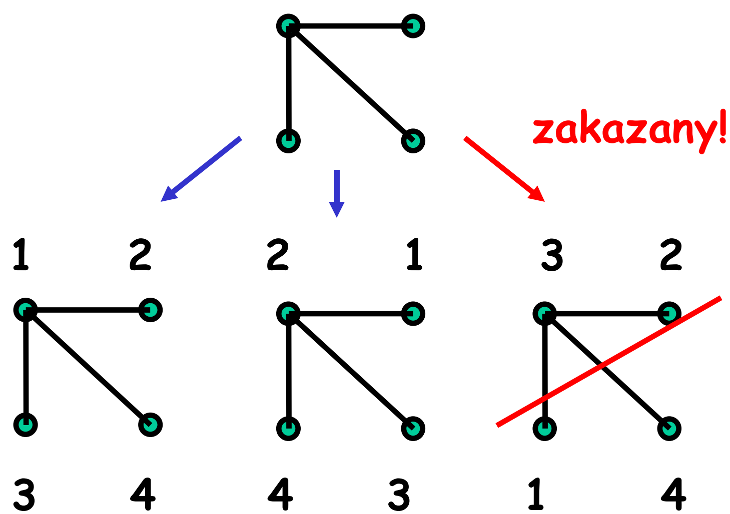
Sieci

Rosnące

dodajemy nowe węzły do istniejącej sieci

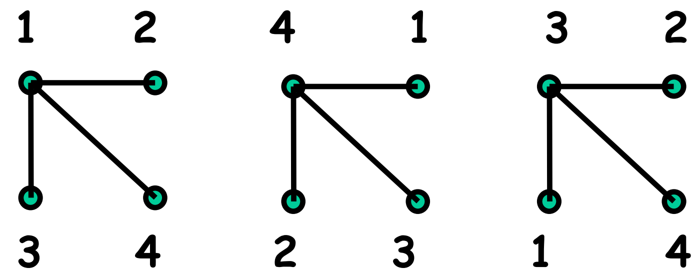
Przykład

Implikuje kauzalną strukturę: jest pierwszy węzeł, drugi, trzeci itd…



Jednorodne

wszystkie węzły są równoprawne – poetykietowanie nie ma znaczenia



itd… - akceptujemy wszystkie!

Najlepiej znana konstrukcja:
grafy przypadkowe Erdősa-Rényi:

-startujemy z N pustych węzłów i łączymy je przypadkowo tworząc L linków

Uogólnienie: Jednorodne grafy ważone

-różne metody generowania

Przykład sieci rosnącej: **model Barabási-Albert (BA)**

- **zaczynamy od grafu kompletnego z m_0 węzłami**
- **w każdym kroku nowy węzeł jest dołączany do m starych węzłów**
- **prawdopodobieństwo że zostanie on przyłączony do danego węzła jest proporcjonalne do krotności (liczby sąsiadów) k tego węzła**

"Preferential attachement rule"

Przykład: m_0=2, m=1 – drzewo BA

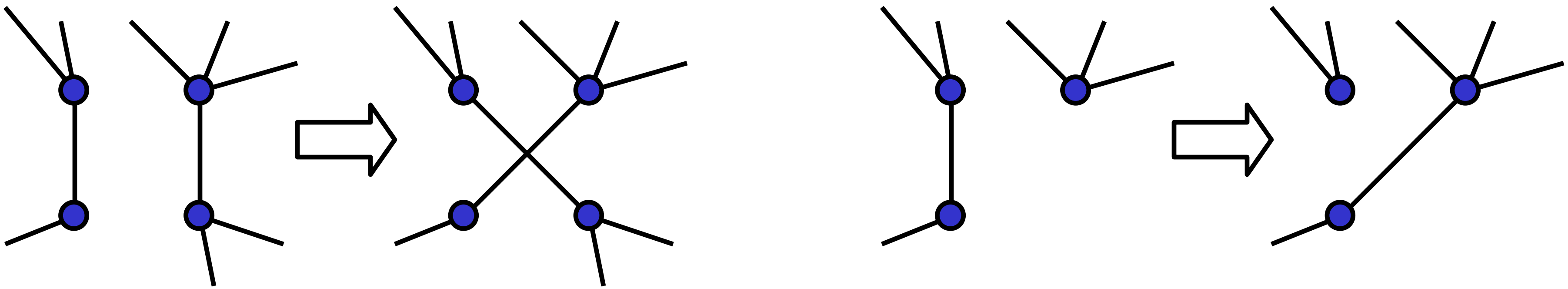
Ważna cecha: rozkład krotności $\pi(q)$ zanika jak $q^{-\gamma}$ – sieć bezskalowa (SF). Takie sieci są powszechnie spotykane.

Dla modelu BA, γ=3:

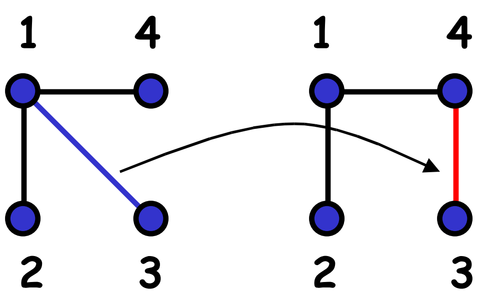
$$\boxed{\pi(q) = \frac{4}{q(q+1)(q+2)}}$$

Sieci jednorodne

- nie wzrost ale raczej reorganizacja połączeń
- zaczynamy od jakiejś sieci rosnącej i „przedrutowujemy" linki



- inne procesy (kasowanie/dodawanie linków) również możliwe
- aby otrzymać sieci jednorodne, **ruch musi łamać kauzalność**



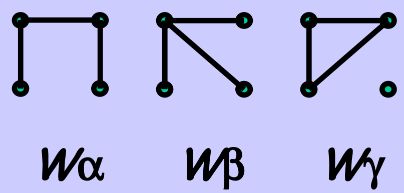
„Złamana kauzalność"
→ wszystkie węzły mają statystyczne te same własności

Przykład

Porównanie sieci rosnących jednorodnych

- mechanika statystyczna sieci – wygodny sposób na porównanie
- idea: zdefiniować zespół statystyczny poetykietowanych grafów

Zespół stat.: obiekty + wagi

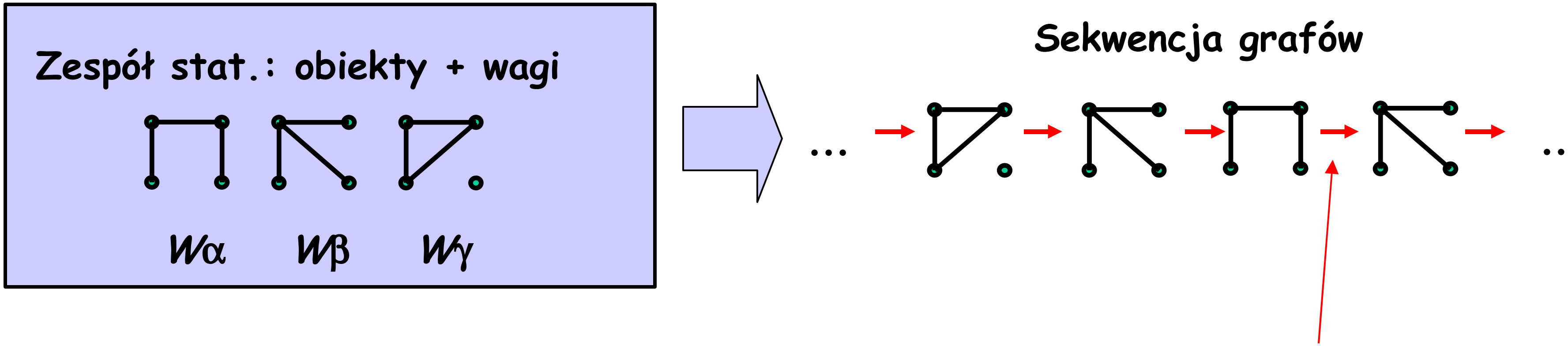


- funkcja podziału Z
- wielkości „fizyczne” jako średnie po zespole stat.

- tutaj rozważam zespół stat. poetykietowanych grafów o N węzłach i L linkach
- rozkład grafów równoprawdopodobnych – nieciekawe (nie-SF)
- nas interesują BA rosnące i jednorodne (grafy ważone)

Generowanie s. jednorodnych na komputerze

- Pomysł – próbkujemy zespół statystyczny grafów poetykietowanych – sieci będą generowane z częstościami ~ do ich wag statystycznych:



- nowa sieć β jest otrzymywana przez **małą zmianę** poprzedniej α (proces Markova)
- algorytm Metropolisa: nowa konfiguracja jest akceptowana z prawdopodobieństwem:

$$P_{\alpha\beta} = \min\left\{1, \frac{W_\beta}{W_\alpha}\right\}$$

Przykład: jednorodne **drzewo** z rozkładem krotności BA

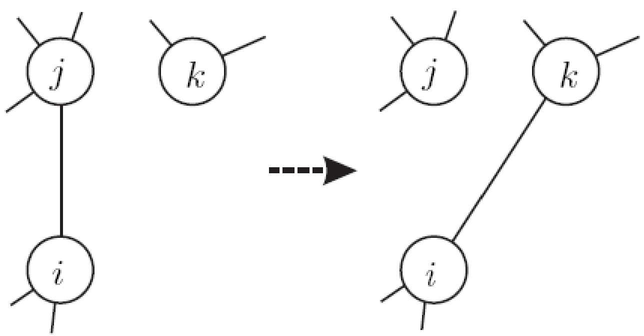
•**waga grafu:** $W(\alpha) = \prod_{i=1}^{N} p(q_i)$ **gdzie** $p(q) = (q-1)!\dfrac{4}{q(q+1)(q+2)}$

•**wtedy rozkład krotności jest jak w modelu BA:**

$$\pi(q) = \frac{4}{q(q+1)(q+2)}$$

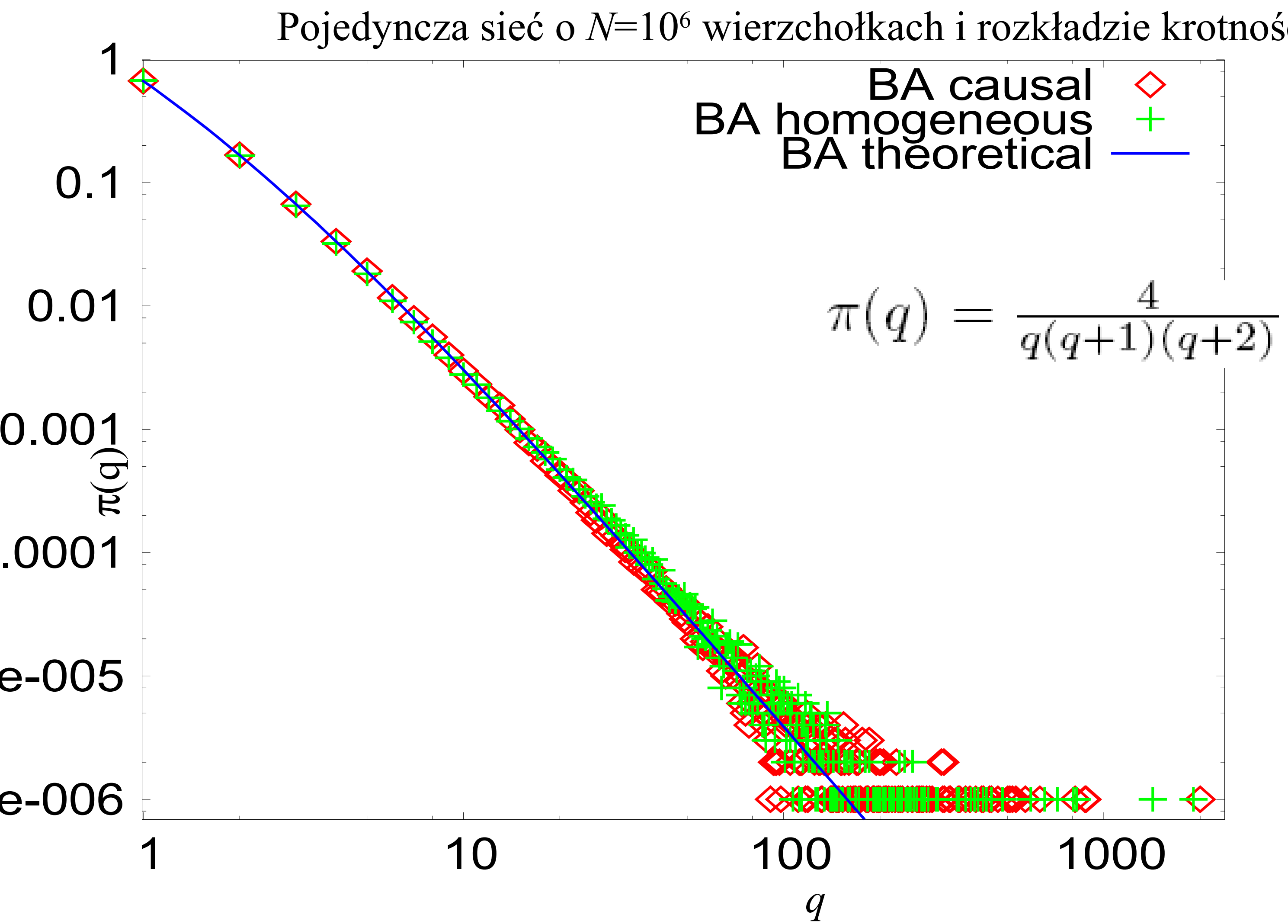
(+ poprawki dla skończonego rozmiaru $N < \infty$)

•**„mała zmiana" – przedrutowanie linków + Metropolis**

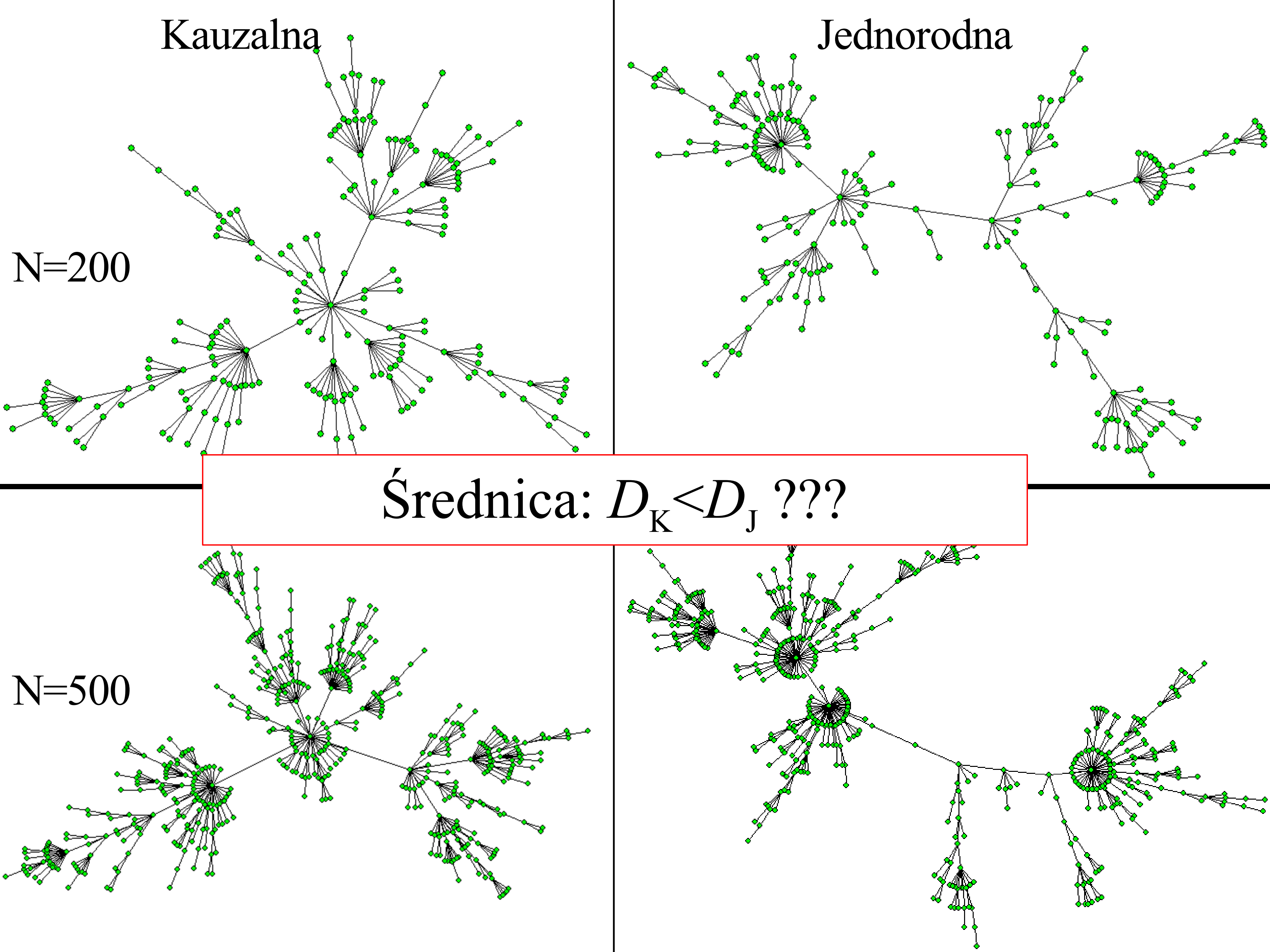


$$P_a(\alpha \to \beta) = \min\left\{1, \frac{p(q_j-1)p(q_k+1)}{p(q_j)p(q_k)}\right\}$$

Rozkład krotności – kauzalne i jednorodne drzewa BA



$\pi(q)$ są identyczne – ale inne własności nie!



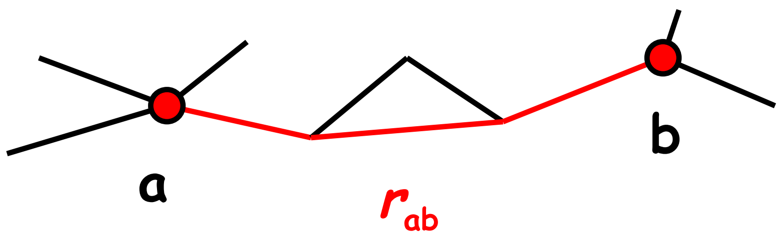
Średnica: $D_{\mathrm{K}} < D_{\mathrm{J}}$???

Rozkład odległości między węzłami

•badamy następującą 2-punktową funkcję korelacji:

$$G_N^{(2)}(r) = \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{ab} \delta(r - r_{ab}) \right\rangle$$

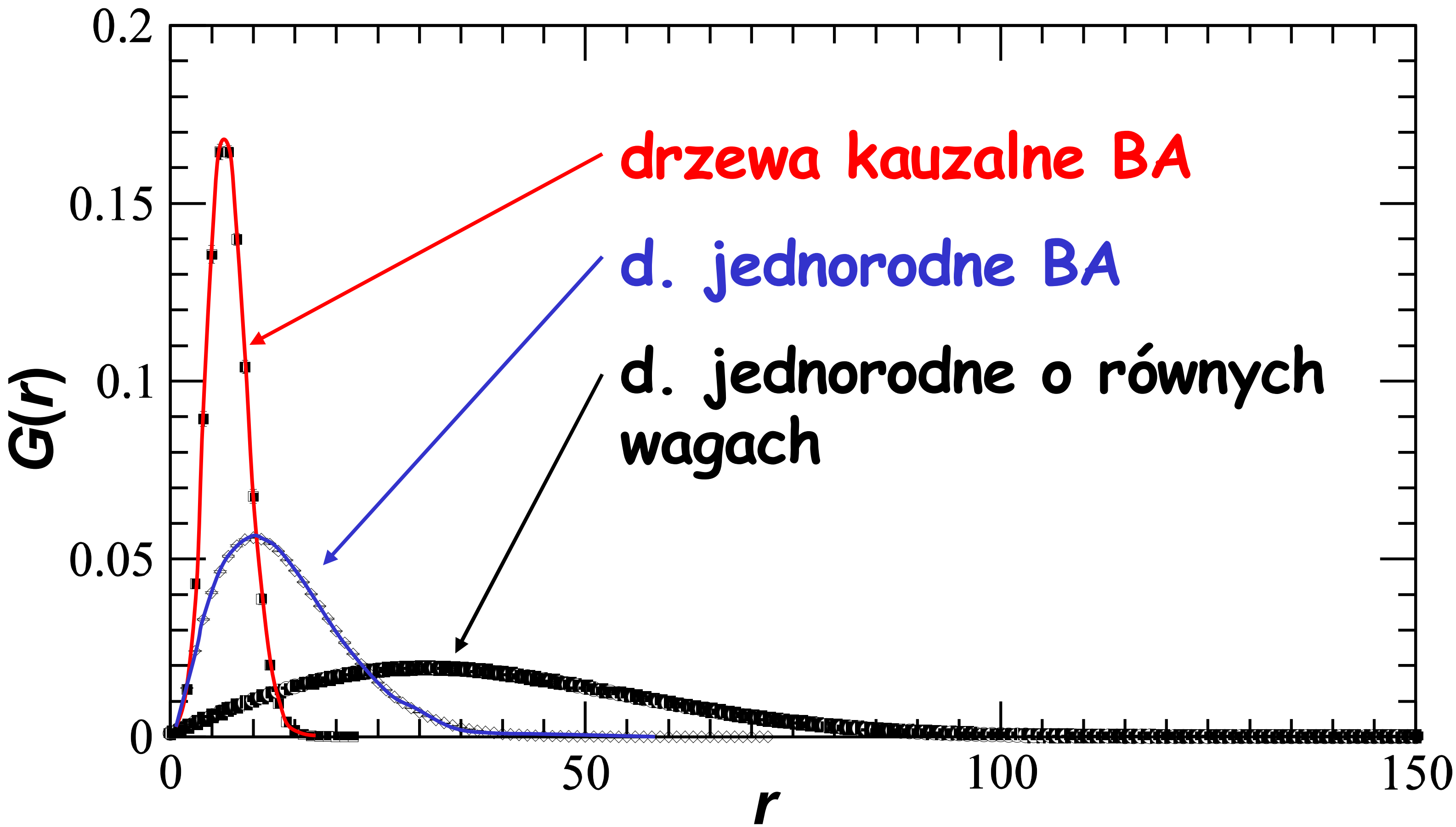
daje pr. że dwa losowo wybrane węzły są odległe o r_{ab} linków



•średnia odległość – wygodna miara „średnicy" sieci

$$\langle r \rangle = \sum_{r=1}^{\infty} r \, G_N^{(2)}(r)$$

Rozkład odległości dla drzew o rozmiarze N=1000.

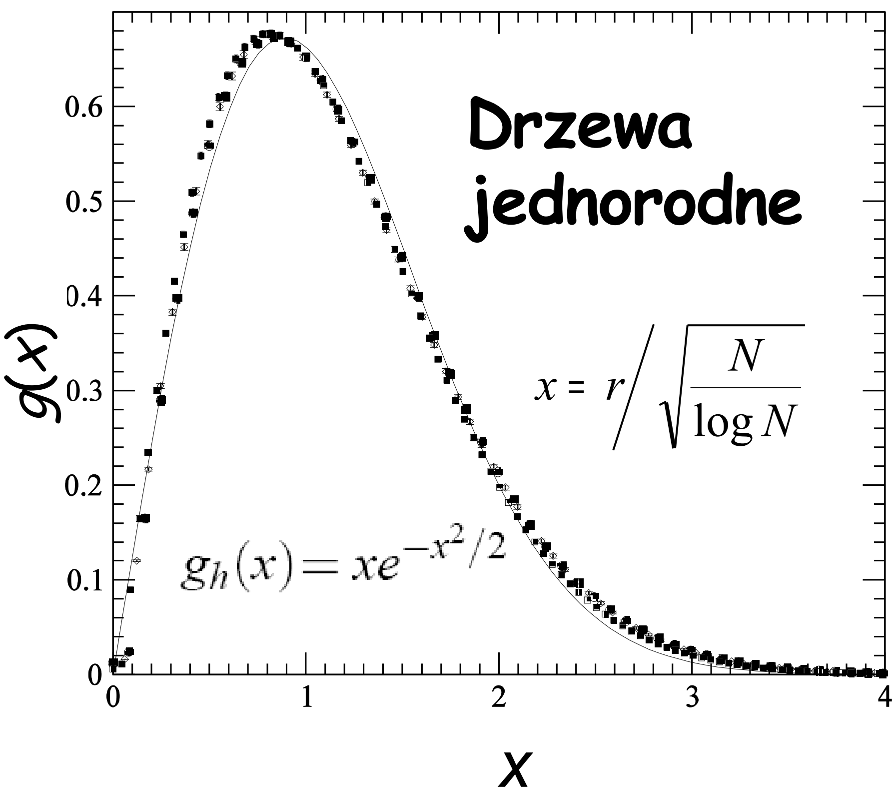


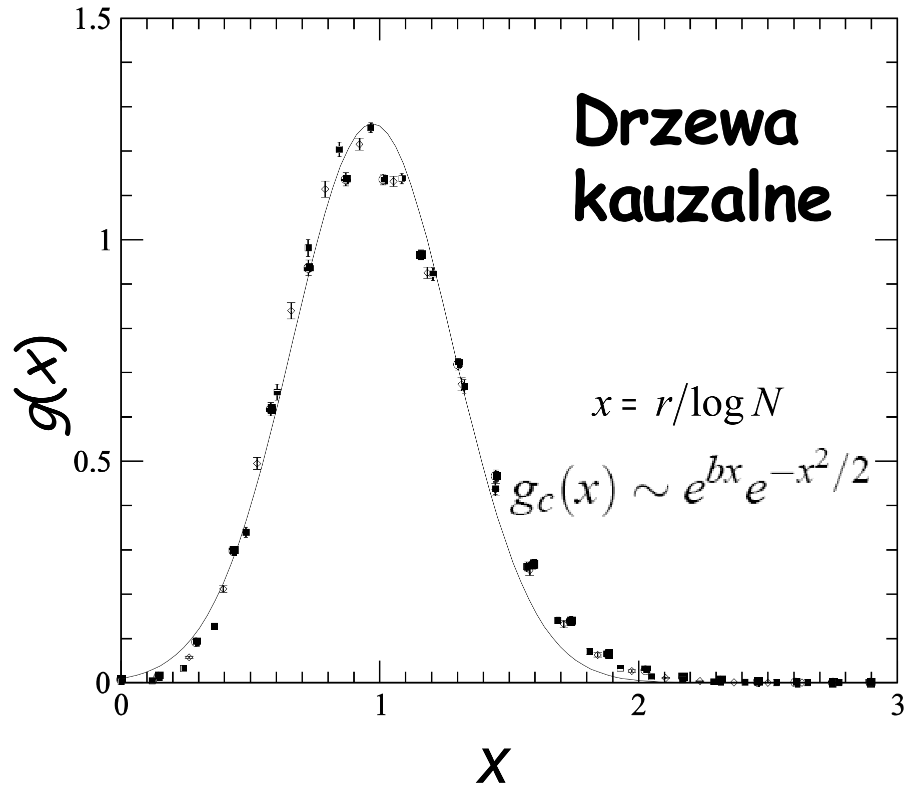
śr. odległość („średnia") drzew:

kauzalne BA < jednorodne BA < d. z równymi wagami

$\sim \ln N$ $\quad \sim \sqrt{N/\ln N}$ $\quad \sim \sqrt{N}$

Rozkład odległości w przeskalowanej zmiennej x





Punkty: dla sieci z N=500,1000,2000,4000,

Kauzalne vs Jednorodne – inne skalowanie i rozkład odległości

Podsumowanie:

•sieci jednorodne mogą naśladować pewne własności sieci rosnących, np. rozkład krotności,

•pewne własności są charakterystyczne tylko dla sieci kauzalnych bądź jednorodnych,

•kauzalność istotnie modyfikuje rozkład odległości (sieci rosnące są ogólnie krótsze niż s. jednorodne)

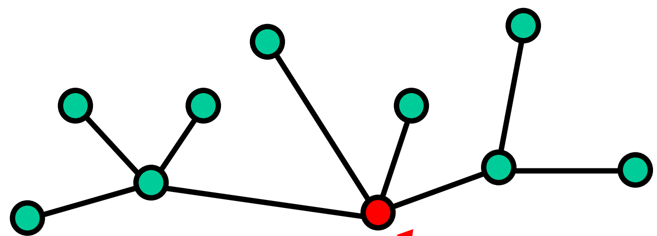
Bibliografia:

- **P. Bialas, Z. Burda, B. Waclaw „Causal and homogeneous networks", AIP Conf. Proc 776 (2005), 14; cond-mat/0503548.**
- **L. Bogacz, Z. Burda, B. Waclaw, „Homogeneous complex networks", Phys. A, w druku; cond-mat/0502124.**
- **L. Bogacz, Z. Burda, W. Janke, B. Waclaw, „A program generating homogeneous random graphs with given weights", Comp. Phys. Comm. 173, 162 (2005), cond-mat/0506330.**

Korelacje krotności węzłów

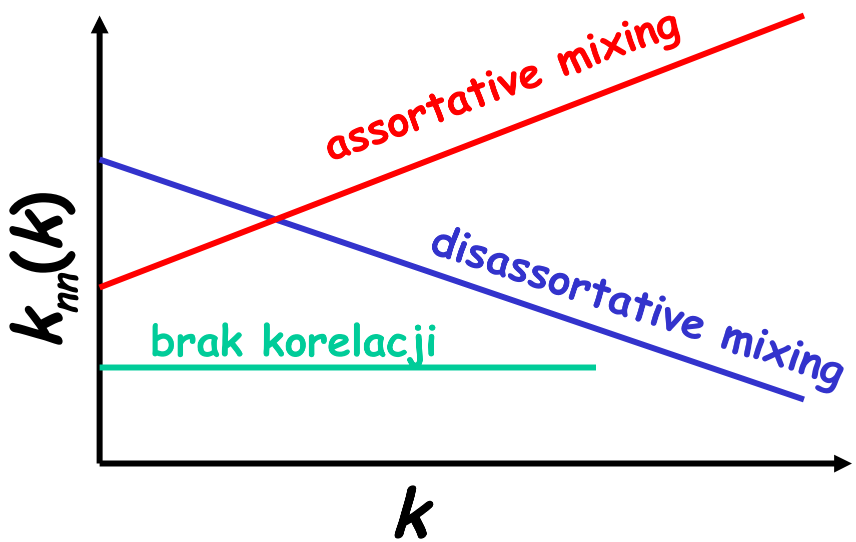
•rozkład krotność-krotność najbliższych sąsiadów trudny do badania eksperymentalnego (fluktuacje)

•lepiej wziąść **średnią krotność $k_{nn}(k)$ najbliższych sąsiadów węzła o krotności k.**



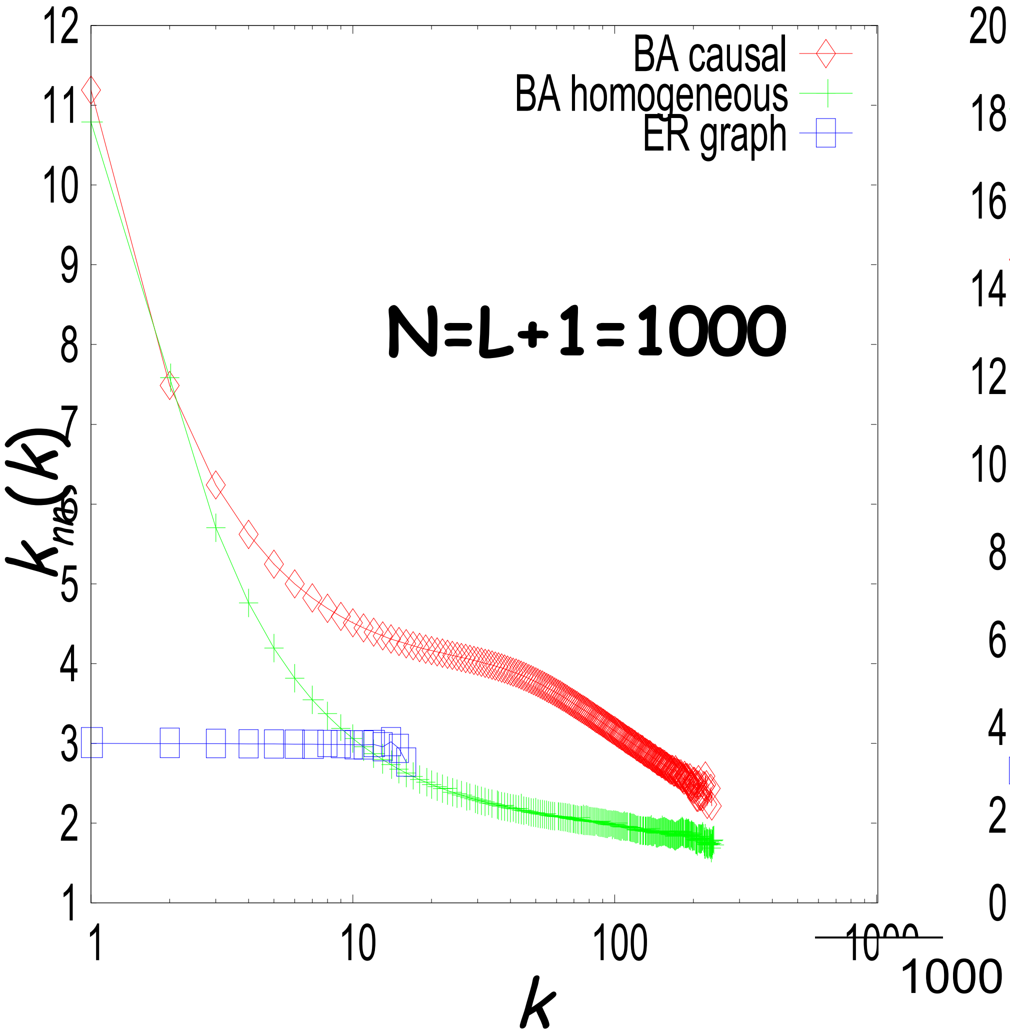
$$k_{nn}(٣) = \frac{٤ + ٣ + ١ + ١}{٤} = ٢.٢٥$$

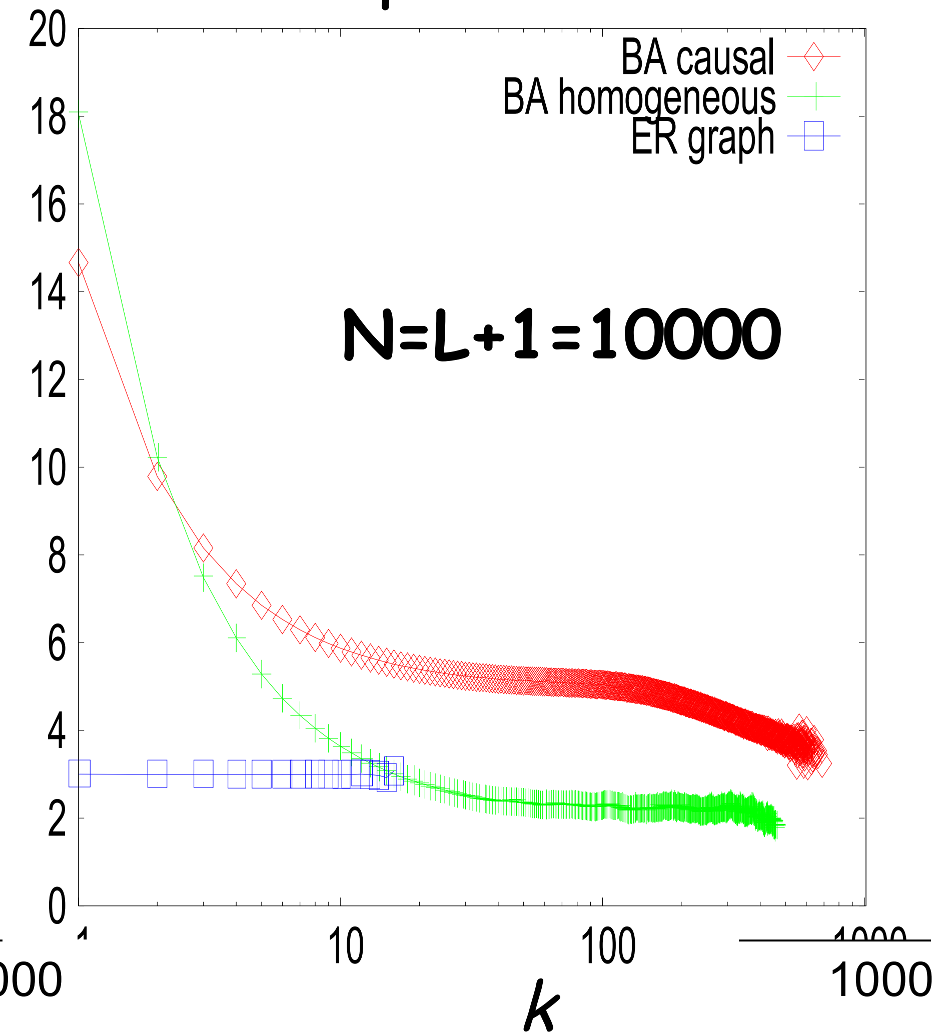
•dwa typy korelacji:



Korelacje dla drzew jednorodnych i kauzalnych

rozkład krotności = BA z $\langle q\rangle \approx 2$





graf ER (Erdős-Rényi) = maksymalnie losowy