
Miary zależności dla modeli PARMA ze stabilnymi innowacjami

Joanna Nowicka-Zagrajek

Agnieszka Wyłomańska

Instytut Matematyki i Informatyki

Centrum Metod Stochastycznych

im. Hugona Steinhausa

Politechnika Wrocławska



Spis treści

1. Wprowadzenie do modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami
2. Miary zależności dla modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami
 - (a) Definicja miar zależności i ich najważniejsze własności
 - (b) Postać tych miar dla omawianych systemów
3. Modele PARMA z gaussowskimi innowacjami ($\alpha = 2$), jako szczegóły przypadku omawianych systemów
 - (a) Warunki gwarantujące istnienie ograniczonego rozwiązania dla modeli PARMA(1,1) i postać tego rozwiązania
 - (b) Wykorzystanie modeli do opisu danych związanych z handlem energią elektryczną

4. Rozszerzenie teorii dla ogólnych modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami ($1 < \alpha < 2$)
 - (a) Warunki gwarantujące istnienie ograniczonego rozwiązania dla modeli PARMA(1,1) i postać tego rozwiązania
 - (b) Relacja pomiędzy dwoma miarami zależności
 - (c) Ilustracja wyników teoretycznych

Wprowadzenie

- Modele PARMA (Periodic Autoregressive Moving Average), modele ARMA z okresowymi współczynnikami, są alternatywą dla konwencjonalnych stacjonarnych szeregów czasowych.
- Wykorzystywane są do modelowania danych wykazujących okresowość (hydrologicznych, meteorologicznych, ekonomicznych, związanych z energią elektryczną).
- Modele PARMA wykazują okresowy "rytm", co jest znacznie bardziej skomplikowane, niż okresowość średniej.
- W przypadku modeli PARMA z gaussowskimi innowacjami ($\alpha = 2$), strukturę zależności opisuje funkcja coweriancji, która jest okresowa, podobnie jak średnia szeregu.
- W przypadku modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami dla

$1 < \alpha < 2$, struktura zależności opisana jest przez dwie miary: kodyferencję (codifference, CD) oraz kowariację (covariation, CV), które są najbardziej popularnymi miarami zależności rozszerzającymi pojęcie kowariancji.

- Miary CD oraz CV są zdefiniowane dla symetrycznych α -stabilnych szeregów czasowych.
- Dla modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami ($1 < \alpha < 2$), CD i CV są okresowe.
- Dla modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami ($1 < \alpha < 2$), CD i CV są proporcjonalne ze współczynnikiem α , tzn. $\frac{CD}{CV} = \alpha$.

Modele PARMA z α -stabilnymi innowacjami

- Modele PARMA z gaussowskimi innowacjami zostały wprowadzone jako klasa procesów okresowo skorelowanych, tzn. procesów mających okresową średnią i kowariancję.
- Są one specjalnym przypadkiem modeli ARMA ze zmiennymi współczynnikami, które są naturalnym rozszerzeniem klasycznych stacjonarnych modeli ARMA, a ponadto wykazują wiele ich własności. Ich wyższość polega na tym, że mogą być wykorzystywane do analizy danych niestacjonarnych bez utraty ich długookresowej zależności.
- Modele PARMA wykorzystywane są przy opisie danych wykazujących okresowość na różnych płaszczyznach.

Modele PARMA z α -stabilnymi innowacjami

Definicja 1 *PARMA*(p, q) z symetrycznymi α -stabilnymi innowacjami dany jest wzorem

$$X_n - \sum_{j=1}^p b_j(n) X_{n-j} = \sum_{i=0}^{q-1} a_i(n) \xi_{n-i}, \quad (1)$$

gdzie współczynniki $(b_j(n))_{j=1}^p$ oraz $(a_i(n))_{i=0}^{q-1}$ są okresowe z tym samym okresem T , a innowacje $\{\xi_n\}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o symetrycznym rozkładzie α -stabilnym ($S\alpha S$) z parametrem skali 1, tzn. z funkcją charakterystyczną daną wzorem:

$$E \exp(i\theta \xi_n) = \exp(-|\theta|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2. \quad (2)$$

Miary zależności dla modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami

Definicja 2 *Miary zależności dla $S\alpha S$ zmiennych losowych X_1 i X_2 :*

- *Kowariacja $CV(X_1, X_2)$ zdefiniowana jest dla $1 < \alpha \leq 2$ następująco:*

$$CV(X_1, X_2) = \int_{S_2} s_1 s_2^{\langle \alpha-1 \rangle} \Gamma(ds),$$

*gdzie Γ jest miarą spektralną wektora losowego (X_1, X_2) ,
 $z^{\langle p \rangle} = |z|^{p-1} \bar{z}$,*

- *Kodyferencja $CD(X_1, X_2)$ zdefiniowana dla $0 < \alpha \leq 2$ następująco:*

$$CD(X_1, X_2) = \ln E \exp\{i(X_1 - X_2)\} - \ln E \exp\{iX_1\} - \ln E \exp\{-iX_2\}.$$

W przeciwieństwie do kodyferencji, kowariacja nie jest symetryczna. Ponadto, gdy $\alpha = 2$ wówczas mamy

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = CV(X_1, X_2) = \frac{1}{2}CD(X_1, X_2).$$

Najważniejszymi własnościami kowariacji są:

- addytywność względem pierwszego argumentu:
 $CV(X_1 + X_2, Y) = CV(X_1, Y) + CV(X_2, Y),$
- skalowanie: $CV(aX, bY) = ab^{\langle \alpha - 1 \rangle} CV(X, Y),$
- jeśli X i Y są niezależne, wówczas $CV(X, Y) = 0,$
- jeśli Y_1 i Y_2 są niezależne, wówczas
 $CV(X, Y_1 + Y_2) = CV(X, Y_1) + CV(X, Y_2).$

Za normę $\|X\|_\alpha$ dla $S_\alpha S$ zmiennej losowej przyjmujemy

$\|X\|_\alpha = (CV(X, X))^{1/\alpha}$ (norma kowariacyjna). Szereg $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ jest ograniczony w przestrzeni K z normą $\|\cdot\|_\alpha$ gdy $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|X_n\|_\alpha^\alpha < \infty$.

Oznaczamy $X = Y$ w K wtedy i tylko wtedy, gdy $\|X - Y\|_\alpha = 0$.

Lemat 1 *Jeśli $X_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)\xi_{n-j}$, gdzie innowacje $\{\xi_n\}$ są niezależnymi SaS zmiennymi losowymi z parametrem skali 1, wówczas prawdziwe są:*

$$CV(X_n, X_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(n)c_{k-n+j}(k)^{\langle \alpha-1 \rangle} \quad \alpha > 1,$$

$$CD(X_n, X_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|c_j(n)|^\alpha + |c_{k-n+j}(k)|^\alpha - |c_j(n) - c_{k-n+j}(k)|^\alpha).$$

Modele PARMA z gaussowskimi innowacjami ($\alpha = 2$)

Analiza szeregów czasowych w znacznej mierze wykorzystuje stacjonarne szeregi czasowe. Jednak w wielu przypadkach założenie o stacjonarności badanego szeregu jest zbyt upraszczające. Modele PARMA, jako procesy okresowo skorelowane, są alternatywą dla takich procesów. Z założenia są niestacjonarne, ale wykazują wiele własności procesów stacjonarnych.

Twierdzenie 1 (Makagon, Weron, Wyłomańska, 2004) System $PARMA(1,1)$ dany w Definicji 1 dla $\alpha = 2$, $p = 1$, $q = 1$ z okresem T ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $|P| = |b_1 b_2 \dots b_T| \neq 1$. Ponadto rozwiązanie to dane jest wzorem:

$$X_n = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-j+1}^n a_{n-j} \xi_{n-s}, & \text{gdy } |P| < 1, \\ - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \xi_{n+s}, & \text{gdy } |P| > 1, \end{cases} \quad (3)$$

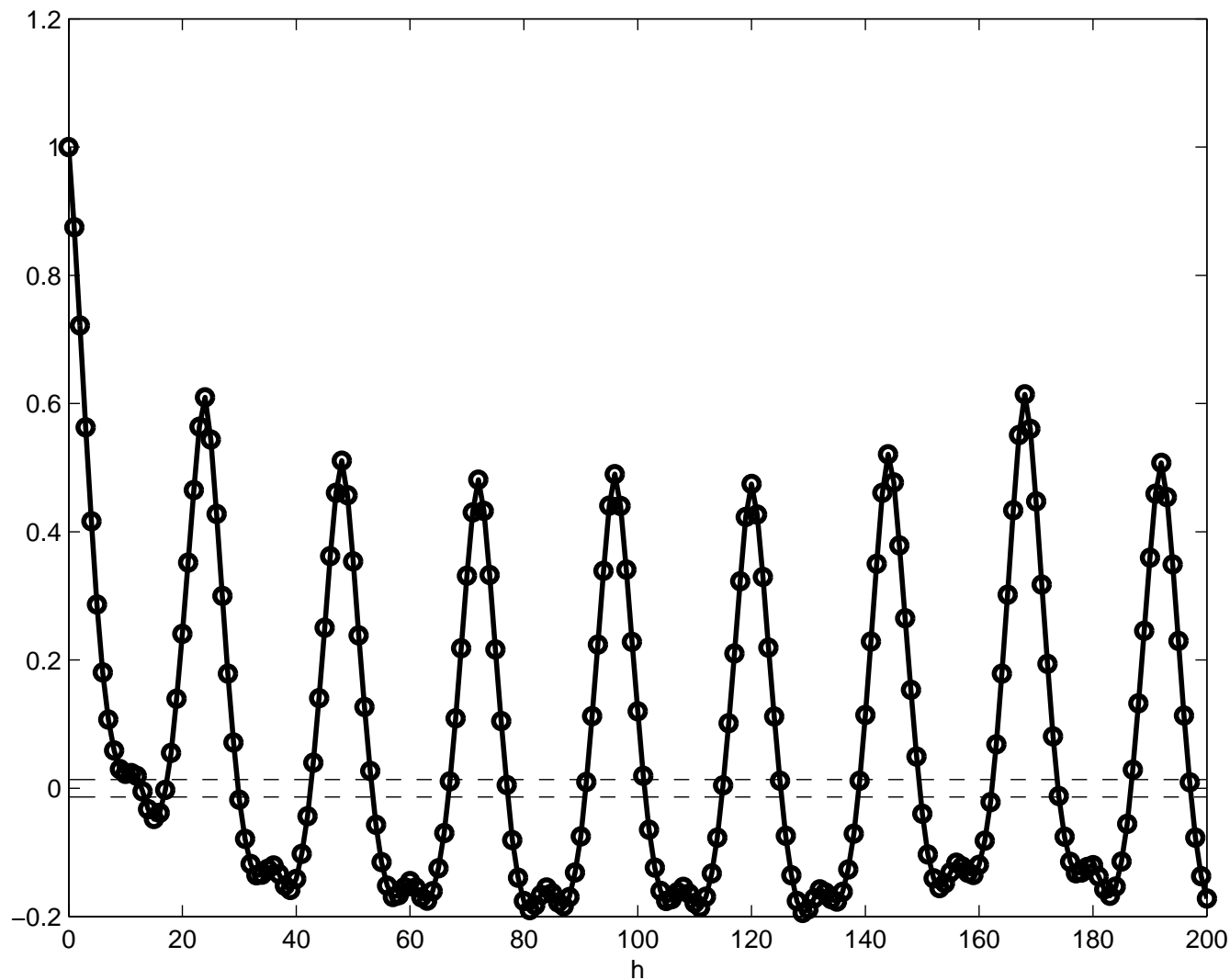
gdzie $B_r^s = \prod_{j=r}^s b_j$ (z konwencją $B_r^s = 1$ gdy $r > s$).

Szereg dany wzorem (3) jest okresowo skorelowany, tzn. dla każdego $k \in Z$ kowariancja $E(X_n X_{n+k})$ jest okresowa względem n z okresem T i dana jest wzorem

$$E(X_n X_{n+k}) = \begin{cases} \frac{B_{n+1}^{n+k}}{1-P^2} \sum_{s=0}^{T-1} (B_{n-s+1}^n a_{n-s})^2, & \text{gdy } |P| < 1 \\ \frac{P^2}{B_{n+1}^{n+k} (P^2 - 1)} \sum_{s=1}^T \left(\frac{a_{n+k+s}}{B_{n+k+1}^{n+k+s}} \right)^2, & \text{gdy } |P| > 1. \end{cases}$$

Przykład 1 *Rozpatrujemy godzinowe spotowe ceny energii na Towarowej Giełdzie Energii S.A. z okresu: styczeń 2003-styczeń 2005. Na Rysunku 1 umieszczono wykres funkcji autokowariancji dla maksymalnego opóźnienia $h = 200$. Dodatkowo zaznaczono również 95% przedział ufności dla ruchu Browna.*

Funkcja autokowariancji z maksymalnym opóźnieniem $h = 200$.



- *Wykres funkcji autokowariancji wskazuje, że analizowane dane mogą być modelowane przez model PARMA z okresem 24.*
- *Kryteria wyboru optymalnego modelu (BIC, FPE) wskazały na najlepszy model PARMA(1,1) z $P = 0.0053$.*
- *Optymalny model ma postać*

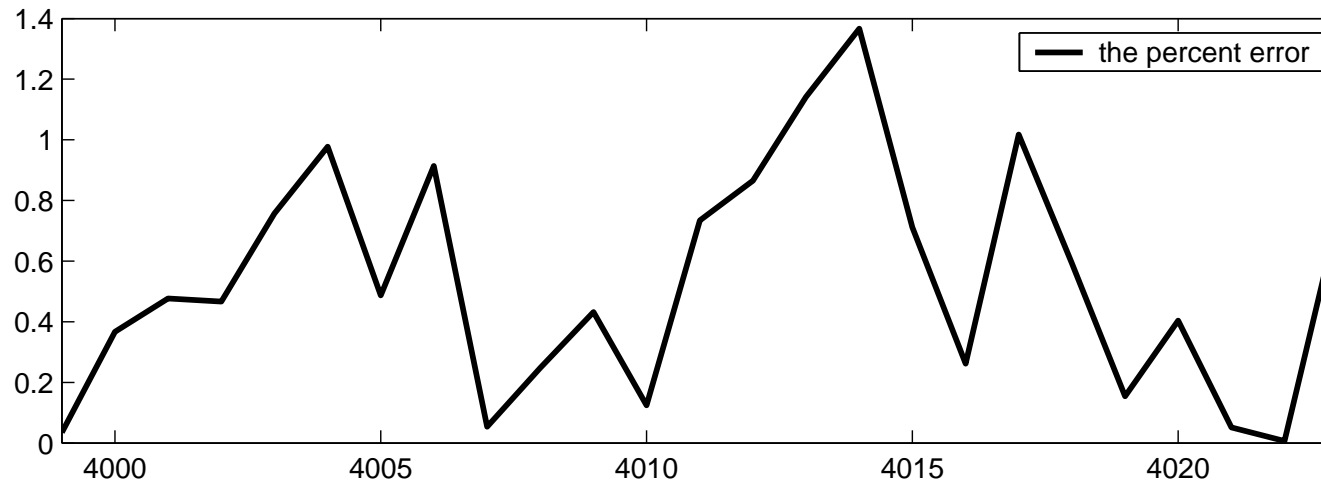
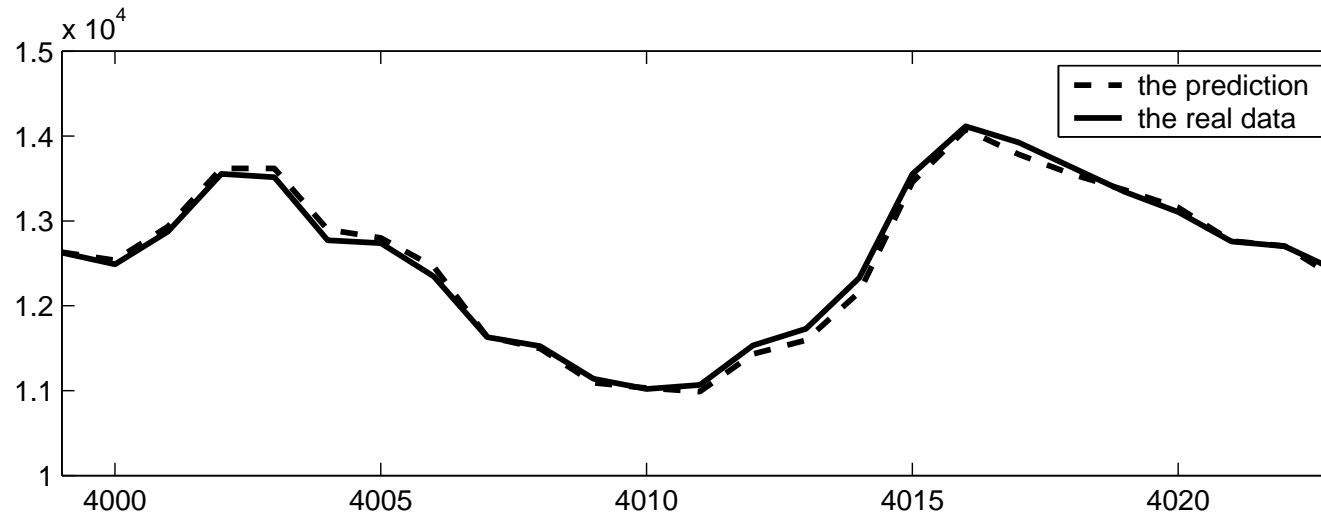
$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-s+1}^n a_{n-s} \xi_{n-s}.$$

- *Funkcja kowariancji dana jest zatem wzorem*

$$EX_n X_{n+k} = \frac{B_{n+1}^{n+k}}{1 - |P|^2} \sum_{l=0}^{23} |a_{n-l} B_{n-l+1}^n|^2$$

i jest okresowa względem n .

Na Rysunku 2 pokazano jednokrokovą predykcję dla następnych 24 godzin bazując na otrzymanym modelu PARMA(1,1).

Jednokrokowa predykcja dla spotowych cen energii elektrycznej.

Rozszerzenie teorii dla ogólnych modeli PARMA z α -stabilnymi innowacjami ($1 < \alpha < 2$)

W dalszej części rozpatrujemy jedynie modele PARMA(1,1) z innowacjami z rozkładu SaS dla $1 < \alpha < 2$, dane wzorem:

$$X_n - b_n X_{n-1} = a_n \xi_n, \quad (4)$$

gdzie współczynniki i innowacje mają takie same własności jak w Definicji 1.

Twierdzenie 2 *Jeśli $|P| = |b_1 b_2 \dots b_T| \neq 1$, wówczas system $PARMA(1,1)$ z innowacjami z rozkładu $S\alpha S$ zdefiniowany w (4) ma ograniczone rozwiązanie dane wzorem:*

$$X_n = \sum_{s=0}^{\infty} B_{n-s+1}^n a_{n-s} \xi_{n-s}, \quad \text{gdy } |P| < 1$$

$$X_n = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{n+s}}{B_{n+1}^{n+s}} \xi_{n+s}, \quad \text{gdy } |P| > 1.$$

Modele PARMA dla $|P| < 1$

Lemat 2 *Jeśli $|P| < 1$ i $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem (4), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n, m \in \mathbb{Z}$ mamy*

$$CV(X_n, X_m) = \frac{\left(B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \right)^{\text{sign}(n-m)}}{1 - |P|^\alpha} \sum_{s=0}^{T-1} \left| B_{\min(n,m)-s+1}^m a_{\min(n,m)-s} \right|^\alpha.$$

Lemat 3 *Jeśli $|P| < 1$ i $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem (4), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n, m \in \mathbb{Z}$ mamy:*

$$CD(X_n, X_m) = \frac{1 + \left| B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \right|^\alpha - \left| 1 - B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \right|^\alpha}{1 - |P|^\alpha} \sum_{s=0}^{T-1} \left| B_{\min(n,m)-s+1}^{\min(n,m)} a_{\min(n,m)-s} \right|^\alpha.$$

Miary wyznaczone w Lematach 2 i 3 są okresowe z okresem T .

Twierdzenie 3 *Jeśli $|P| < 1$ i $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem (4), wówczas*

(a) *dla każdego $n \in Z$ i $1 < \alpha \leq 2$ mamy:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n-k})}{CV(X_n, X_{n-k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{n+k}, X_n)}{CV(X_{n+k}, X_n)} = \alpha,$$

(b) *dla każdego $n \in Z$ i $1 < \alpha < 2$ mamy:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{n-k}, X_n)}{CV(X_{n-k}, X_n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n+k})}{CV(X_n, X_{n+k})} = 0.$$

Modele PARMA dla $|P| > 1$

Lemat 4 *Jeśli $|P| > 1$ i $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem (4), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n, m \in \mathbb{Z}$ mamy*

$$CV(X_n, X_m) = \frac{|P|^\alpha \left(B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \right)^{\text{sign}(n-m)}}{|P|^\alpha - 1} \sum_{s=1}^T \left| \frac{a_{\max(n,m)+s}}{B_{m+1}^{\max(n,m)+s}} \right|^\alpha.$$

Lemat 5 *Jeśli $|P| > 1$ i $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem (4), wówczas dla $1 < \alpha \leq 2$ i $n, m \in \mathbb{Z}$ mamy:*

$$CD(X_n, X_m) = \frac{|P|^\alpha \left(1 + \left| B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \right|^\alpha - \left| 1 - B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \right|^\alpha \right)}{|P|^\alpha - 1} \sum_{s=1}^T \left| \frac{a_{\max(n,m)+s}}{B_{\min(n,m)+1}^{\max(n,m)+s}} \right|^\alpha.$$

Twierdzenie 4 *Jeśli $|P| > 1$ i $\{X_n\}$ jest ograniczonym rozwiązaniem (4), wtedy*

(a) *dla każdego $n \in Z$ i $1 < \alpha < 2$ mamy*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n-k})}{CV(X_n, X_{n-k})} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{n+k}, X_n)}{CV(X_{n+k}, X_n)} = 0,$$

(b) *dla każdego $n \in Z$ i $1 < \alpha \leq 2$ mamy:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_{n-k}, X_n)}{CV(X_{n-k}, X_n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{CD(X_n, X_{n+k})}{CV(X_n, X_{n+k})} = \alpha.$$

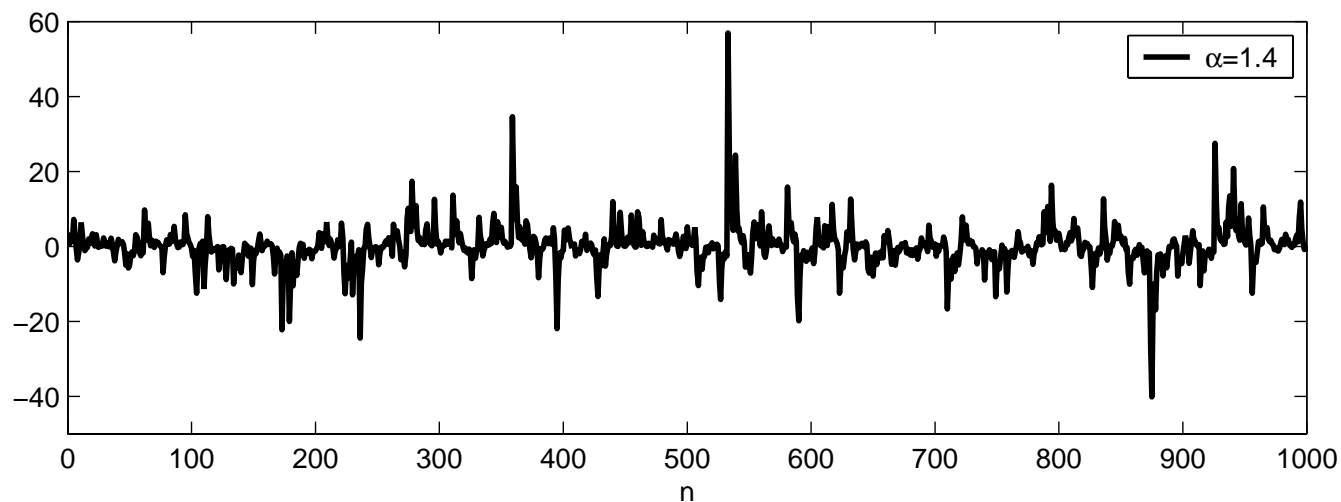
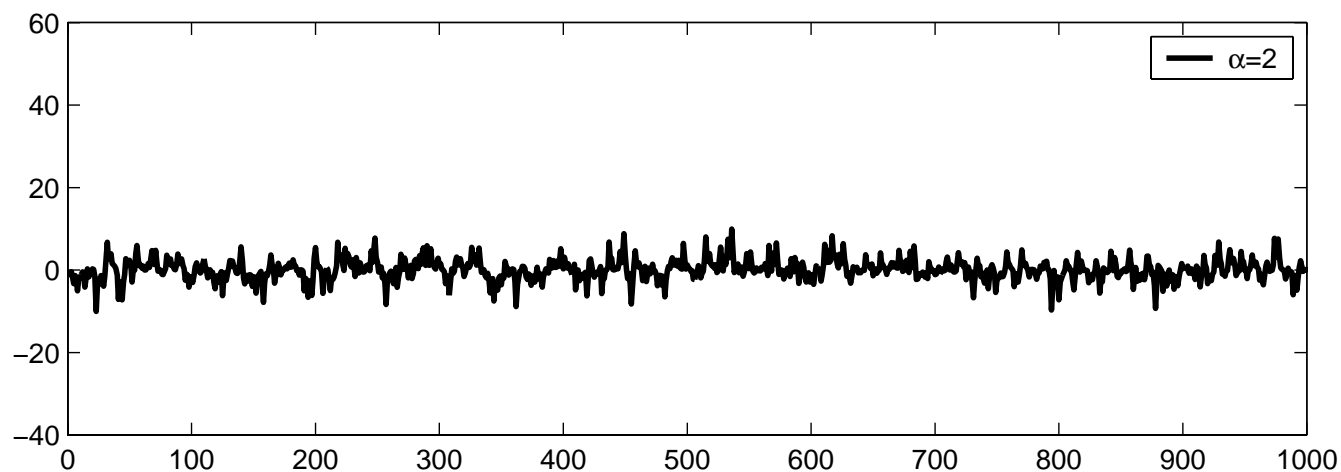
Przykład 2 *Rozpatrzmy dwa modele PARMA(1,1) z innowacjami z rozkładu $S\alpha S$ dla $\alpha = 2$ (przypadek gaussowski) i $\alpha = 1.4$. Ponadto przyjmujemy $T = 3$ oraz:*

$$b_n = \begin{cases} 0.5 & \text{dla } n = 1, 4, 7, \dots, \\ 1.6, & \text{dla } n = 2, 5, 8, \dots, \\ 0.4, & \text{dla } n = 3, 6, 9, \dots, \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, 4, 7, \dots, \\ 2, & \text{dla } n = 2, 5, 8, \dots, \\ 0.003, & \text{dla } n = 3, 6, 9, \dots \end{cases}$$

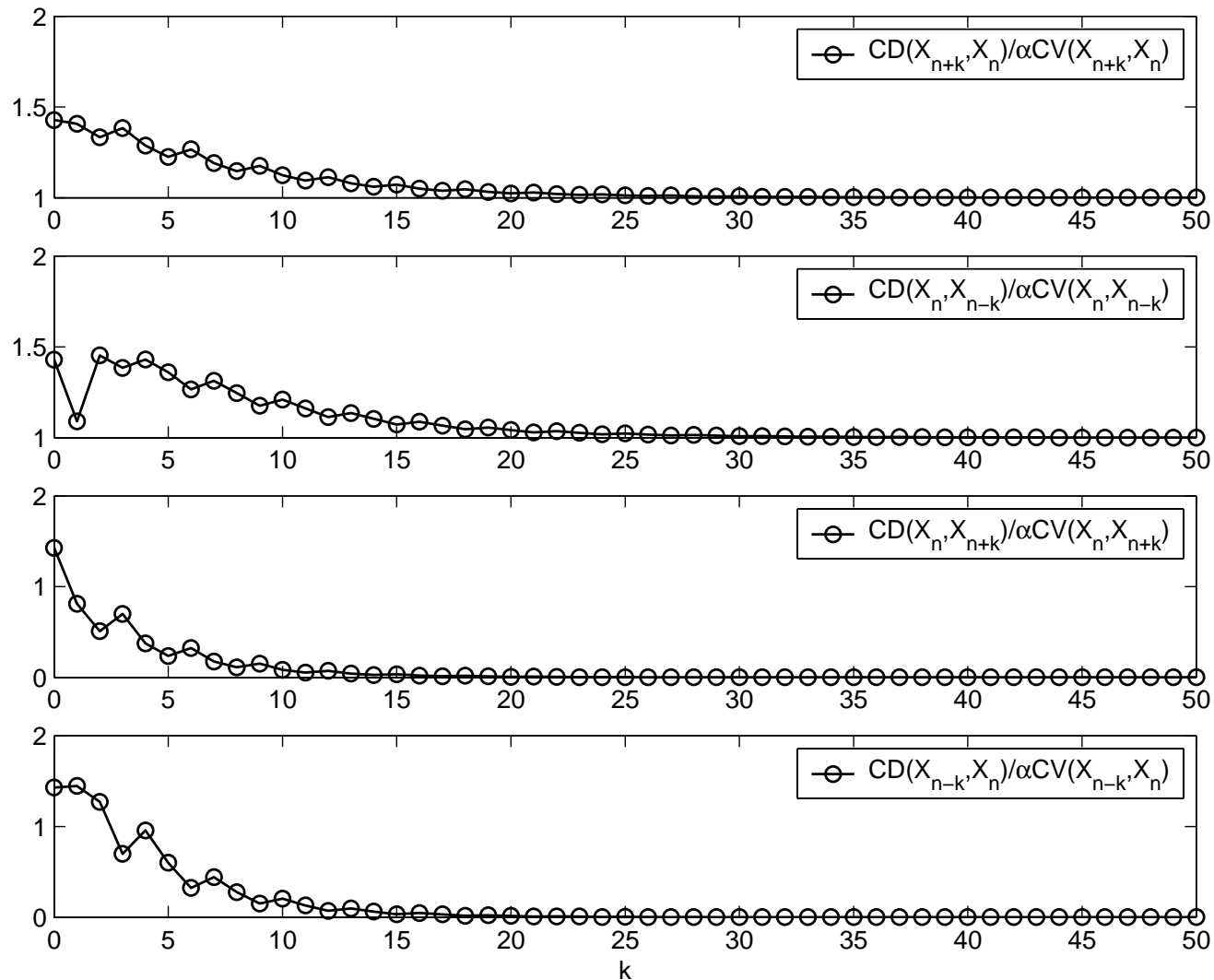
W tym wypadku $P = 0.32$. Na Rysunku 3 przedstawiono po jednej realizacji z każdego modelu.

Realizacje modeli PARMA(1,1) dla $\alpha = 2$ i $\alpha = 1.4$.



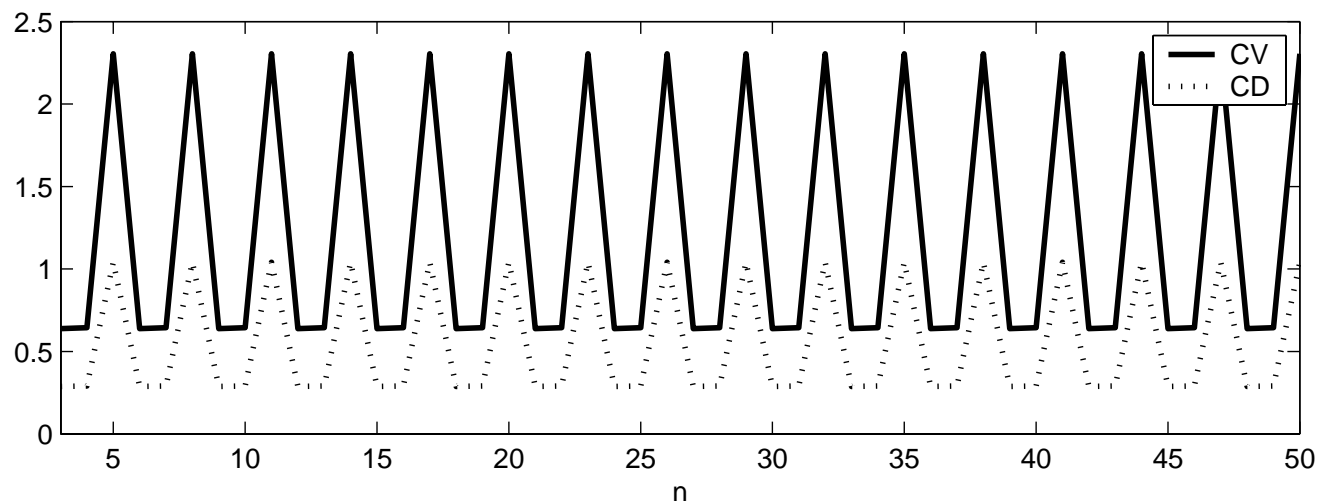
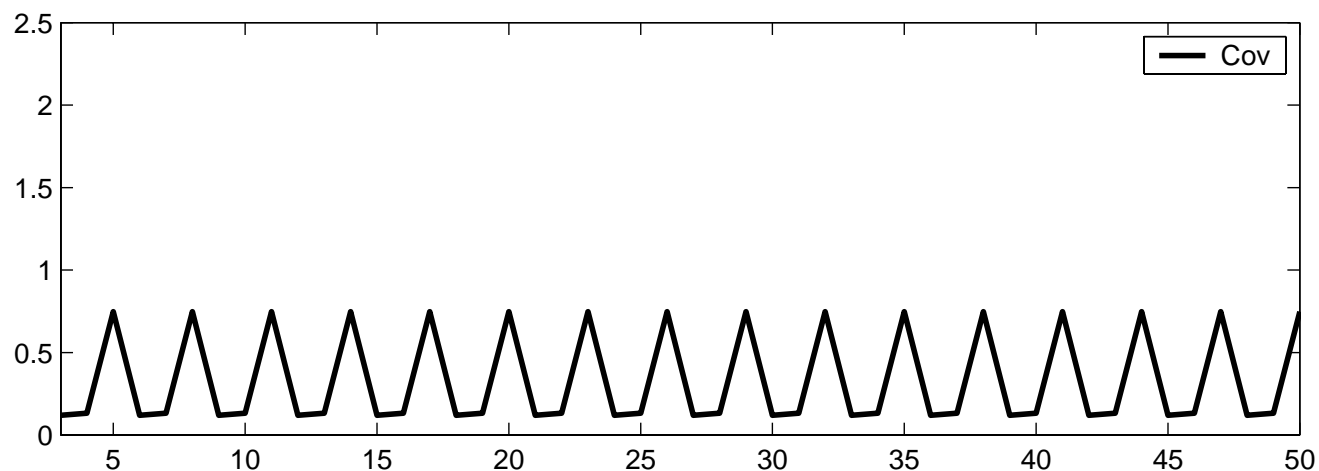
Na Rysunku 4 pokazano ilorazy $\frac{CD(X_{n+k}, X_n)}{\alpha CV(X_{n+k}, X_n)}$, $\frac{CD(X_n, X_{n-k})}{\alpha CV(X_n, X_{n-k})}$,
 $\frac{CD(X_n, X_{n+k})}{\alpha CV(X_n, X_{n+k})}$ i $\frac{CD(X_{n-k}, X_n)}{\alpha CV(X_{n-k}, X_n)}$ dla $k = 0, 1, \dots, 50$, $n = 50$ i $\alpha = 1.4$.
Zgodnie z Twierdzeniem 3 pierwsze dwa ilorazy dążą do 1, a ostatnie dwa - do 0 wraz ze wzrostem k .

Miary zależności modeli PARMA(1,1) dla $\alpha = 2$ i $\alpha = 1.4$.



Na Rysunku 5 przedstawiono miary zależności: $Cov(X_n, X_{n+k})$ dla modelu $PARMA(1,1)$ z innowacjami z rozkładu dla $\alpha = 2$ oraz $CV(X_n, X_{n+k})$, $CD(X_n, X_{n+k})$ dla $PARMA(1,1)$ z innowacjami o symetrycznym rozkładzie α -stabilnym dla $\alpha = 1.4$. Przyjęto $k = 6$.

Miary zależności modeli PARMA(1,1) dla $\alpha = 2$ i $\alpha = 1.4$.



References

- [1] Gladyshev E. G., 1961, Periodically correlated random sequences, *Sov. Math.* 2., 385-388.
- [2] Makagon, A., Weron A., Wyłomańska A., 2004, Bounded solutions for ARMA model with varying coefficients , *Appl. Math.* 31, 273-285.
- [3] Nowicka J., Weron A., 1997, Measures of Dependence for ARMA Models with Stable Innovations, *Annales* vol.LI 1,14, 133-144.
- [4] Nowicka J., 1997, Asymptotic behavior of the covariation and the codifference for ARMA models with stable innovations, *Stochastic Models* 13, 673-685.
- [5] Wyłomańska A., 2005, Description of the spectral measures for periodically correlated solutions of PARMA sequences, *Research Report HSC/05/3*, Wroclaw University of Technology.