Dodatek D
(Dowód twierdzenia Campbella-Francisa)

Rozważmy sygnał $\xi(t)$ stanowiący nieskończony ciąg impulsów $\eta(t)$ o przypadkowym rozkładzie czasowym. Zapiszemy go w postaci

$$\xi(t) \;=\; \sum_i \eta\,(\mathbf{t}\text{-}\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}) \qquad \text{(D-1)}$$

gdzie $\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}$ jest zmienną losową.

Wydzielmy z tego ciągu **podzbiór** kolejno po sobie następujących impulsów o liczności **K** mieszczący się w interwale **T.** W takim przypadku (D-1) przyjmie postać:

$$\xi(t) \;=\; \sum_{i=1}^{K} \eta\,(\mathbf{t}\text{-}\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}) \qquad \text{(D-2)}$$

Wobec wzajemnej niezależności impulsów ciągu i przypadkowości ich następstwa w czasię, prawdopodobieństwo pojawiania się poszczególnych impulsów w przedziale od $\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}$ do ($\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}$ + d$\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}$) wynosi $\mathbf{P}_\mathrm{i}$ = d$\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}$/**T**. W konsekwencji średnia wartość sygnału na podzbiorze **K** będzie wynosić:

$$\overline{\xi}^{s} \;=\; \int_0^T \frac{dt_i}{T} \cdots \int_0^T \frac{dt_k}{T} \sum_{i=1}^{K} \eta\,(\mathbf{t}\text{-}\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}) \;=\; \sum_{i=1}^{K} \int_0^T \frac{dt_i}{T} \;\; \eta\,(\mathbf{t}\text{-}\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}) \qquad \text{(D-3)}$$

Wartość średnia na podzbiorze jest niezależna od czasu, można więc za „**t**" przyjąć wartość dowolną. Dla wygody przyjmijmy ją równą połowie rozciągłości czasowej podzbioru. Kładąc **t = T/2** oraz **(T/2 - $\underline{\mathbf{t}}_\mathrm{i}$) = $\underline{\mathbf{u}}$** otrzymamy:

$$\overline{\xi}^{s} \;=\; \tfrac{K}{T} \int_0^T \eta\left(\tfrac{T}{2} - t_i\right) \;=\; \tfrac{K}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \eta(u)\, du \qquad \text{(D-4)}$$

a jeśli **T** jest dostatecznie duże

$$\overline{\xi}^{s} \;=\; \tfrac{K}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(u)\, du \qquad \text{(D-5)}$$

Średnia ze średnich na podzbiorach po wszystkich wartościach **K** daje uśrednienie sygnału po czasie. Zatem:

$$\langle \mathbf{f} \rangle \;=\; \overline{\overline{\xi}^{s}} \;=\; \tfrac{\overline{K}}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(u)\, du \qquad \text{(D-6)}$$

W wyrażeniu (D-6) iloraz $\frac{\overline{K}}{T}$ reprezentuje średnią po czasie częstotliwość impulsów $\langle f \rangle$ wobec czego możemy napisać

$$\langle \xi \rangle \;=\; \langle f \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\; dt \qquad \text{(D-7)}$$

W terminach sygnału napięciowego otrzymamy znaną postać 1-go twierdzenia **Campbella Francisa** o wartości średniej.

$$\langle V \rangle \;=\; \langle f \rangle \int_{-\infty}^{\infty} V(t)\, dt \qquad \text{(D-8)}$$

W podobny sposób wykażemy słuszność 2-go twierdzenia **Campbella-Francisa** o wariancji. W pierwszym kroku tej procedury wyznaczmy średni kwadrat funkcji sygnału **ξ(t)** na podzbiorze **K**.

$$\overline{\xi^2}^{s} = \int_0^T \frac{dt_i}{T} \cdots \int_0^K \frac{dt_k}{T} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \eta(t-t_i)\,\eta(t-t_j) \qquad \text{(D-9)}$$

W powyższym wyrażeniu występuje **K** całek, dla których **i=j** oraz (**K-1**) całek, dla których **i≠j**. Wynoszą one odpowiednio:

$$\tfrac{1}{T}\int_0^T \eta^2(t-t_i)\,dt_i \qquad \text{dla } \mathbf{i=j}$$

oraz

$$\tfrac{1}{T}\left[\int_0^T \eta(t-t_i)\,dt_i \int_0^T \eta(t-t_j)\,dt_j\right] \qquad \text{dla } \mathbf{i\neq j}$$

Uwzględniając z kolei niezależność wartości średniej na podzbiorze od czasu przyjmijmy znów **t = T/2** i wprowadźmy nowe zmienne **u** i **w** :

$$u = (\tfrac{T}{2} - t_i) \qquad \text{oraz} \qquad w = (\tfrac{T}{2} - t_j)$$

W tych terminach otrzymujemy

$$\overline{\xi^2}^{s} = \tfrac{K}{Y}\int_{-T/2}^{T/2} \eta^2(u)\,du + \tfrac{K(k-1)}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \eta(u)\,du \int_{-T/2}^{T/2} \eta(w)\,dw \qquad \text{(D-10)}$$

Dla **T** dostatecznie dużego

$$\overline{\xi^2}^{s} = \tfrac{K}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(u)\,du + \tfrac{K^2-K}{T^2}\int_{-\infty}^{\infty} [\,\eta(u)\,du\,]^2 \qquad \text{(D-11)}$$

Zauważmy, że kwadrat wartości średniej na podzbiorze funkcji $\xi(t)$ wynosi

$$\left(\overline{\xi}^{s}\right)^2 = \left[\tfrac{K}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(u)\,du\right]^2 = \tfrac{K^2}{T^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta(u)\,du\right]^2 \qquad \text{(D-12)}$$

Obustronne odjęcie równań (D-11) i (D-12) daje

$$\overline{\xi^2}^{s} - \left(\overline{\xi}^{s}\right)^2 = \tfrac{K}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(u)\,du - \tfrac{K}{T^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta(u)\,du\right]^2 \qquad \text{(D-13)}$$

skąd po uśrednieniu na wszystkich wartościach **K** otrzymujemy

$$var(\xi) = \tfrac{\overline{K}}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(u)\,du - \tfrac{\overline{K}}{T^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta(u)\,du\right]^2 \qquad \text{(D-14)}$$

Pamiętając, że $\left(\frac{\overline{K}}{T}\right) = \langle f \rangle$, dla warunku $T \to \infty$ równanie (D-14) sprowadza się do postaci

$$var(\xi) \;=\; \langle f \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(u)\,du \qquad \text{(D-15)}$$

W terminach sygnału napięciowego otrzymujemy więc

$$var(V) \;=\; \langle f \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \left[V(t)\right]^2\,dt \qquad \text{D-(16)}$$

Materiały źródłowe.

1. N.R. Campbell.
   Proc. Cambridge Phil. Soc. 15, 117, (1908).
2. N.R. Campbell, V.J. Francis.
   Proc. Instn. Electr. Engrs. Part III. 93, 45, (1946).
3. A. van der Ziel.:"Noise, Sources, Characterization, Measurements", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1970.