DESKA GALTONA

Rysunek : Deska Galtona – doświadczenie z kulkami ze szkła.

Celem demonstracji jest wytłumaczenie rozkładu Bernoulliego, zwanego inaczej rozkładem dwumianowym [1]. Rozkład dotyczy serii N niezależnych prób. Wynikiem każdej pojedynczej próby może być zdarzenie A, któremu przypisujemy prawdopodobieństwo p, lub zdarzenie B (nie A), którego prawdopodobieństwo jest $q = 1-p$. Wynikiem serii N prób jest tzw. ciąg Bernoulliego zdarzeń, np. dla $N = 10$ taki ciąg może wyglądać tak: AABBBABABB. Prawdopodobieństwo realizacji takiego ciągu jest równe iloczynowi prawdopodobieństw $ppqqqpqpqq = p^4q^6$. Ogólnie prawdopodobieństwo realizacji ciągu zawierającego k zdarzeń A i $N-k$ zdarzeń B w <u>ustalonej kolejności</u> ma postać p^kq^{N-k}. Jeżeli pytamy, jakie jest prawdopodobieństwo że w N próbach zdarzenie A zajdzie k razy <u>bez względu na kolejność</u>, to odpowiedzią na to pytanie jest właśnie rozkład Bernoulliego

$$P(k) = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) p^k q^{N-k}.$$

Ten wynik powstaje przez pomnożenie wyrażenia p^kq^{N-k} przez symbol Newtona „N po k”, który określa, na ile sposobów można rozmieścić k znaków A w ciągu N znaków.
Przejdźmy do samej demonstracji. Kulka, przechodząc przez odstęp między kolejnymi gwoździami, spada na kolejny gwóźdź umieszczony na środku jej drogi. Można sądzić, że minie tę przeszkodę z równym prawdopodobieństwem $p = 1/2$ z prawej lub z lewej strony. Prawdopodobieństwo, że kulka minie przeszkodę N razy z prawej strony jest równe $(1/2)^N$. Taki ciąg może zdarzyć się na tylko jeden sposób: „N po zero” wynosi jeden. Jeżeli na swym torze kulka raz odbije się w lewo, a N minus jeden razy w prawo, to taki ciąg może zdarzyć się na N sposobów, na każdej z N linii. Inaczej mówiąc, „N po jeden” $= N$, itd. W naszym przypadku deska zawiera $N = 20$ rzędów gwoździ. Na końcu swej drogi kulka wpada do jednej z przegród. Położenie takiej przegrody odpowiada liczbie tych zdarzeń, w których kulka przechodzi z prawej strony gwoździa. Do środkowej przegrody wpada kulka, która 10 razy odbiła się z prawej strony i 10 razy z lewej. Zwykle takich kulek jest najwięcej. Odpowiada to maksimum funkcji „N po k” dla $k = N/2$.
Po zakończeniu doświadczenia ilość kulek w przegrodach mówi nam w przybliżeniu, jaki jest kształt funkcji „20 po k”, gdzie k jest numerem przegrody. Przybliżenie jest tym lepsze, im więcej użyjemy kulek. Przegródek jest nieco za mało,

ale statystyka mówi, że skrajne przegrody nie będą w gruncie rzeczy potrzebne. Do ostatniej przegrody wpadałaby jedna kulka na 220, a tylu kulek nie chcemy używać. Łatwym sposobem obliczania wartości symbolu Newtona jest tzw. trójkąt Pascala, ale dla $N = 20$ jest to już nieco uciążliwe.

W omawianym przypadku $p = q = 1/2$, dlatego $p^k q^{N-k} = (1/2)^N$ i $P(k)$ zależy od k tylko poprzez symbol Newtona. Aby to zmienić, wystarczy przekrzywić deskę. Być może zobaczymy pewną asymetrię w rozkładzie kulek w przegródkach.

Rysunek : Deska Galtona – doświadczenie z kulkami ze szkła.

[1] F.Reif, Fizyka statystyczna, PWN Warszawa 1973.
[2] A.K.Wróblewski, J.A.Zakrzewski, Wstęp do fizyki, t.1, PWN, Warszawa 1976.