NIEPOWTARZALNE WAHADŁO

Obliczenia położenia wahadła w funkcji czasu przeprowadzono, całkując równania Lagrange'a numerycznie metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu. Zapisując przybliżoną postać lagranżjanu, zaniedbano objętość brył, traktując je jako masy punktowe, oraz grawitacyjny wkład do energii potencjalnej związanej z wychyleniem o kąt α_2 . Takie przybliżenie jest usprawiedliwione faktem, że energia elastyczna tego wychylenia jest dużo większa, niż energia grawitacyjna, i dlatego to wychylenie jest dużo mniejsze, niż wychylenie o kąt α_1, którego energię grawitacyjną wzięto pod uwagę. Z tego samego powodu zaniedbano elastyczne wychylenie drążka B_1 wokół osi poziomej B_2. Efektywnie układ dysponuje trzema stopniami swobody. Są to: kąt α_1 odkształcenia elastycznego; kąt α_2 obrotu wokół osi poziomej B_2 i kąt α_3 obrotu wokół osi pionowej B_3.

Lagranżjan stożka M_1 można zapisać w postaci

$$\mathcal{L}_1 = \frac{M_1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z).$$

Współrzędne x, y, z wiążą się z kątami α_1 , α_2 , α_3 następująco:

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{L_3}{2} + \Delta\right)\cos\alpha_2 + L_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2, \\ y &= \left(\frac{L_3}{2} + \Delta\right)\sin\alpha_2 + L_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \\ z &= -L_1 \cos\alpha_1. \end{aligned}$$

Energia potencjalna to

$$U = M_1 g z + \frac{k^2}{2}\Delta^2.$$

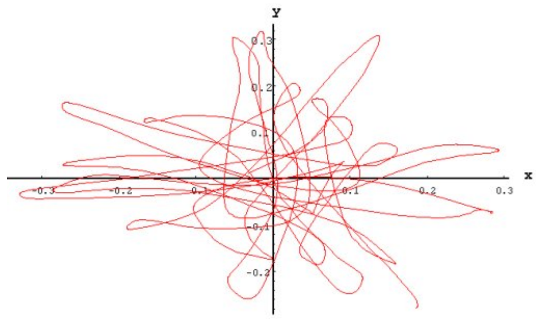
Lagranżjan masy M_2 to jej energia kinetyczna

$$\mathcal{L}_2 = \frac{M_2 {L_2}^2}{2}\left(\dot{\alpha_3}\right)^2.$$

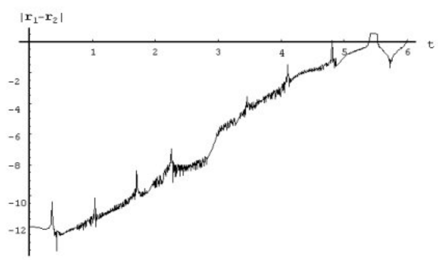
W powyższych wzorach k jest współczynnikiem sprężystości elastycznego drążka, a $\Delta \approx L_1\alpha_2$ jest wychyleniem masy M_1, związanym z elastycznym odkształceniem drążka B_1.

W układzie zachowana jest energia i z-owa składowa momentu pędu.

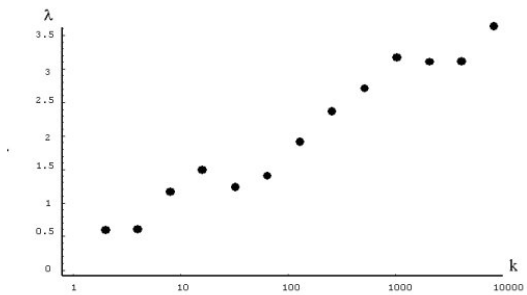
Wyniki obliczeń numerycznych sa zilustrowane na rysunkach:



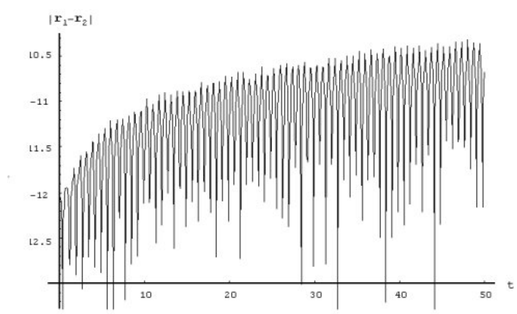
Rysunek 1: Rzut na płaszczyznę (X, Y) trajektorii wahadła, otrzymanej z obliczeń numerycznych.



Rysunek 2: Widoczne są nieregularności występujące co pół okresu, w momentach maksymalnych wychyleń. Nachylenie krzywej pozwala wyznaczyć maksymalny wykładnik Lapunowa.



Rysunek 3: Maksymalny wykładnik Lapunowa w funkcji współczynnika sprężystości k.



Rysunek 4: Narastająca różnica miedzy dwoma trajektoriami wahadła, otrzymanymi z obliczeń. Oś pionowa w skali logarytmicznej.W tym przypadku współczynnik k sprężystości jest nieskończony. Odpowiada to ograniczeniu przestrzeni fazowej do 2 wymiarów, ponieważ dodatkowymi całkami ruchu są tu: energia kinetyczna i z-owa składowa momentu pędu. W efekcie, zgodnie z tw. Poincarego-Bendixona chaos nie może tu występować. Różnica między trajektoriami nie może narastać eksponencjalnie. Jak widać, narasta liniowo.

[1] M.Kułakowska, A.Paździerko, Chaos w demonstracjach, Fizyka w szkole, 1-Wydanie specjalne (2002) 60.

[2] D.Kawalec, A.Paździerko, K.Kułakowski, Chaotic behaviour of a three-dimensional pendulum, TASK Quarterly (2003), w druku.