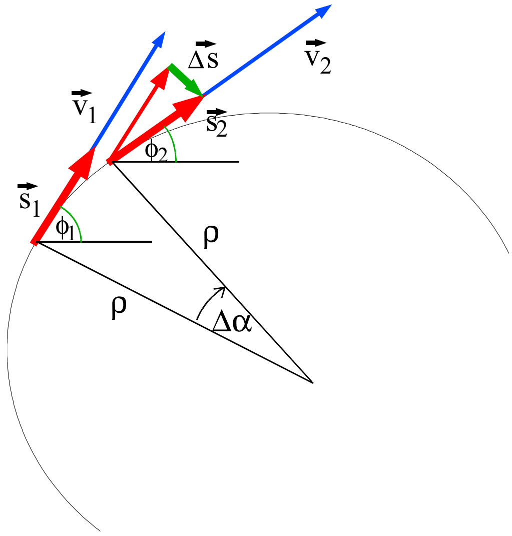
Analiza wektorowa przyspieszeń w ruchu płaskim, krzywoliniowym



Obiekt porusza się po linii krzywej, ułożonej w płaszczyźnie XY. Rozważmy dwie następujące po sobie chwile czasu t_1 i t_2 , oddzielone od siebie różnicą czasu Δt. W tych dwóch chwilach czasu obiekt ten ma odpowiednio wektory prędkości v_1 i v_2 . Prędkości te różnią się zarówno co do wartości, jak i co do kierunku. Każdy z tych wektorów prędkości może być przedstawiony jako:

$$\vec{v}_1 = \vec{s}_1 v_1 \qquad \vec{v}_2 = \vec{s}_2 v_2$$

gdzie wektory s_1 i s_2 są jednostkowymi wektorami, określającymi kierunek i zwrot wektora prędkości, a więc wektorami stycznymi do toru ciała. Odpowiednio liczby v_1 i v_2 są wartościami prędkości w tych chwilach czasu.

Zmianę wektora prędkości można zapisać jako:

$$\vec{\Delta} v = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{s}_2 v_2 - \vec{s}_1 v_1 = \vec{s}_2 v_2 - \vec{s}_2 v_1 + \vec{s}_2 v_1 - \vec{s}_1 v_1 = \vec{s}_2 (v_2 - v_1) + (\vec{s}_2 - \vec{s}_1) v_1 = \vec{s}_2 \Delta v + v_1 \Delta \vec{s}$$

Jeżeli odstęp miedzy rozważanymi chwilami czasu Δt będzie bardzo krótki, to powyższy wzór po podzieleniu przez Δt i przejściu do granicy Δt dążącego do zera przyjmie następującą postać:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{s}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\vec{s}}{dt}$$

O ile pochodna wartości wektora prędkości po czasie nie jest żadną nowościa matematyczną o tyle pochodna jednostkowego wektora, stycznego do toru, po czasie wymaga dokładniejszego omówienia. Bardzo łatwo znaleźć pochodną wektora, jeżeli zna sie zależności jego składowych od czasu. W przypadku wektora stycznego można do wyrażenia jego składowych użyć kąta ϕ , jaki tworzy ten wektor z osia poziomą:

$$\vec{s} = [\cos(\phi), \sin(\phi)] \qquad a \;\; więc \qquad \frac{d\vec{s}}{dt} = [-\sin(\phi), \cos(\phi)]\frac{d\phi}{dt} = \vec{n}\frac{d\phi}{dt}$$

gdzie wektor jednostkowy $\vec{n}$ jest wektorem prostopadłym do $\vec{s}$, a więc i lokalnie prostopadłym do toru ciała i skierowanym „na zewnątrz” toru. Taki wektor prostopadły lokalnie do toru ciała (a więc i do wektora prędkości), nazywamy wektorem normalnym. Pochodną kata ϕ po czasie można znaleźć zauważając, że przyrost kąta ϕ jest zarazem zmianą kąta Δα zakreśloną przez promień wodzący ze środka promienia krzywizny toru, wziętą z przeciwnym znakiem (gdy α rośnie to ϕ maleje). Jeżeli wartość tego promienia wodzącego wynosi ρ to wtedy droga przebyta przez obiekt między chwilami t_1 i t_2 jest równa ΔL = ρ Δα = - ρ Δϕ (miara łukowa kąta) . Wtedy w granicy Δt dążącego do zera mamy:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dL}{dt} = -\frac{v}{\rho}$$

Wtedy całkowity wzór na przyspieszenie przyjmie postać:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{s} - \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_s\vec{s} + a_n\vec{n}$$

$$a_s = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

gdzie a_s jest składową styczną przyspieszenia, zaś a_n jest jego składową normalną. Tak więc całkowity wektor przyspieszenia został rozłożony na składową styczną przyspieszenia, odpowiedzialną za zwiekszanie lub zmniejszanie wartości prędkości z jaką porusza się obiekt, oraz składową normalną przyspieszenia, odpowiedzialną za zakrzywianie toru obiektu.

Dodatkowo można zauważyć, że są to składowe wzdłuż wzajemnie prostopadłych kierunków, tzn. jest to rozkład w ortogonalnym układzie współrzędnych, którego orientacja jest lokalnie dopasowana do toru obiektu. W ortogonalnym układzie współrzędnych mamy:

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_n = a_s\vec{s} + a_n\vec{n} \qquad a^2 = a_s^2 + a_n^2$$

Analizując wartości a_s i a_n dochodzimy do wniosku, że a_s jest znacznie łatwiejsze do policzenia, bo jest po prostu pochodną wartości prędkości po czasie. We wzorze na a_n wielkością nieznaną jest dla nas najczęsciej promień krzywizny toru ρ , w danym jego punkcie. Tak się jednak składa, że bardzo łatwa do policzenia jest długosc całkowitego wektora przyspieszenia a , gdyż możemy go policzyć w oryginalnym układzie XY ze wzoru:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

W tej sytuacji możemy policzyć składową normalną przyspieszenia:

$$a_n^2 = a^2 - a_s^2 \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Jeżeli już znamy a_n możemy po prostu potraktować ρ jako niewiadomą i wyliczyć go przez odwrócenie wzoru na a_n :

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$