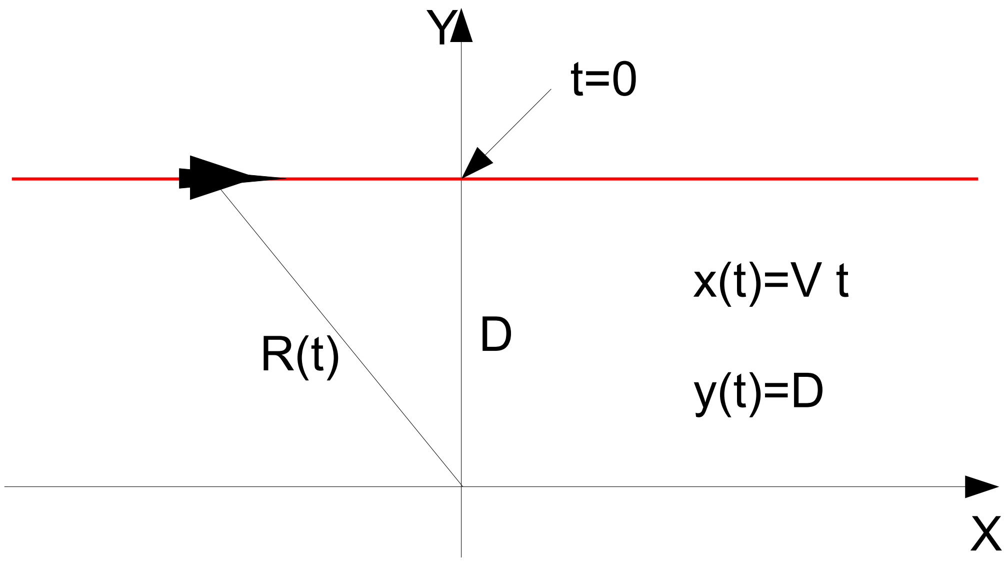
Przelatujący supersamolot



Superszybki samolot o prędkości V przelatuje po linii prostej przechodzącej w odległości D od obserwatora (dla ułatwienia przyjąć X=Vt). Na skutek skończonej wartości prędkości dźwięku obserwator słyszy dźwięk, który samolot wyemitował jakiś czas wcześniej. Różnica czasów między emisją a odbiorem dźwięku zależy od odległości samolotu od obserwatora w momencie **emisji** dźwięku. Zakładając, że natężenie dźwięku odebranego zależy odwrotnie proporcjonalnie od odległości między miejscem emisji a miejscem odbioru obliczyć zależność natężenie dźwięku od czasu **odbioru** (czasu obserwatora).

Odległość samolotu od obserwatora jako funkcja czasu emisji wynosi:

$$R(t) = \sqrt{D^2 + V^2 t^2}$$

Moment odbioru sygnału jako funkcja czasu:

$$T = t + \Delta t = t + \frac{R(t)}{V_d} = t + \frac{\sqrt{D^2 + V^2 t^2}}{V_d}$$

Moment odbioru sygnału jako funkcja **odległości** w momencie emisji:

$$T = \frac{\sqrt{R^2 - D^2}}{V} + \frac{R}{V_d}$$

Gdyby udało się wyliczyć R(T) z powyższego równania policzenie natężenia dźwięku jako funkcji czasu odbioru T byłoby proste:

$$I \sim R^{-\alpha} \qquad 1 < \alpha < 2$$

W najprostszej wersji można przyjąć α=1.

Niestety próba wyliczenie *R(T)* prowadzi do równania:

$$\left(T - \frac{R}{V_d}\right)^2 - \frac{R^2}{V^2} + \frac{D^2}{V^2} = 0$$

i dalej:

$$\left(\frac{V^2}{V_d^2} - 1\right) R^2 - \frac{2 T V^2}{V_d} R + D^2 + V^2 T^2 = 0$$

co daje dość niemiłe pierwiastki równania kwadratowego na *R(T).*

Inna wersja to wykorzystanie tzw. postaci parametrycznej postaci *I(T)* poprzez wypisanie zależności natężenia dźwięku i czasu odbioru dźwięku od czasu jego emisji, tzn. *T(t)* oraz *I(t):*

$$T(t) = t + \frac{\sqrt{D^2 + V^2 t^2}}{V_d} \qquad I(t) = \frac{C}{R(t)} = \frac{C}{\sqrt{D^2 + V^2 t^2}}$$

Jeżeli z równania po prawej wyliczymy *t* jako funkcję *I(t)* i wstawimy do równania po prawej to otrzymamy równanie funkcji odwrotnej tzn. zamiast *I(T)* dostaniemy funkcję *T(I).* Dla $\alpha = 1$ ma ona postać:

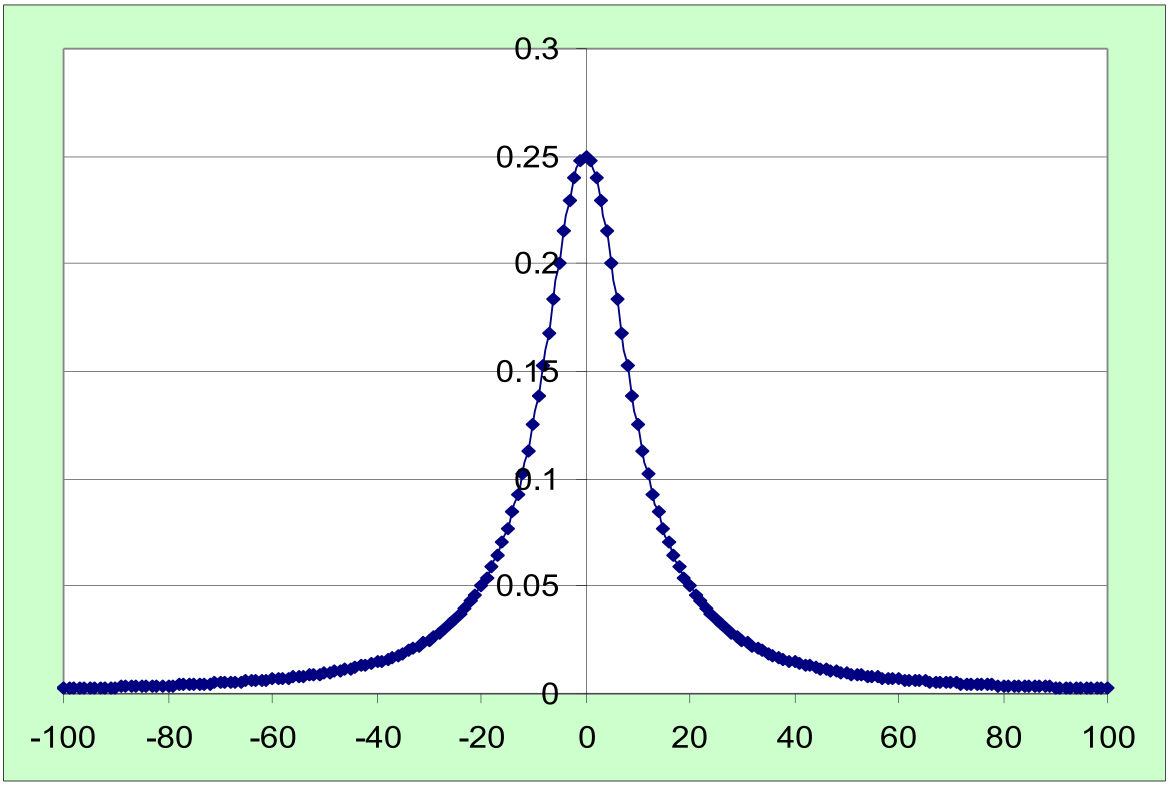
$$T(x) = \frac{D}{V}\sqrt{x^2 - 1} + \frac{D}{V_d} x \qquad gdzie \qquad x = \frac{I_{max}}{I(T)} = \frac{C}{D\, I(T)}$$

Okazuje się, że zarówno dla zależności *R(T) ,* otrzymanej z pierwszej wersji obliczeń, jak i dla wzoru na *T(I)* wyliczonego powyżej otrzymujemy rozwiązania wielowartościowe (niejednoznaczne). Oznacza to, że zarówno dla danego T nie zawsze dostaniemy jednoznaczny wynik na odległość samolotu w momencie emisji sygnału (szczególnie dla $V > V_d$) oraz że dla dla wybranego natężenia dźwięku I dostajemy więcej niż jedną wartość momentu odbioru sygnału.

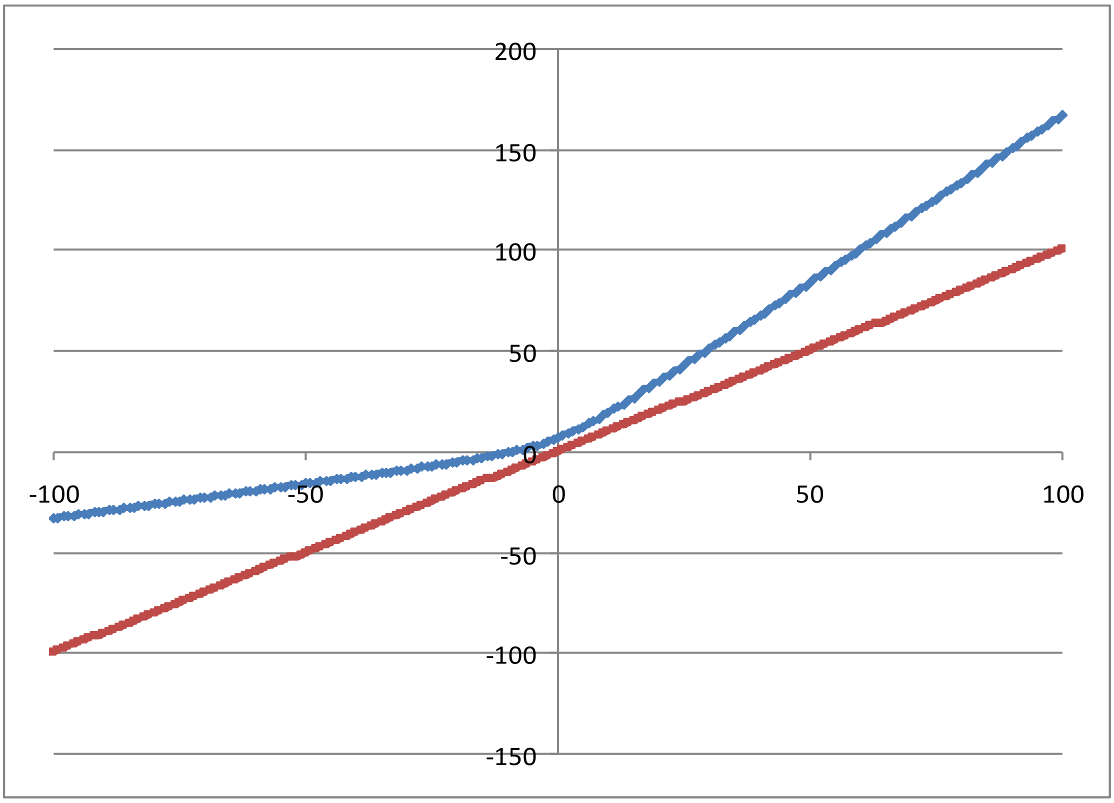
W tej sytuacji dla jak najlepszego zrozumienia problemów z jednoznacznością rozwiązania najwygodniej jest skorzystać z równań wyjściowych drugiej wersji obliczeń tj. *T(t)* oraz *I(t)* jako definiujących tzw. parametryczną postać funkcji *I(T)*. Wykresy wykonane w MS Excel powstają przez wyliczenie wartości *T(t)* oraz *I(t)* i wykonanie wykresu zależności *I(T).* Taki sposób wykonania wykresu eliminuje wszystkie problemu z niejednoznacznością wartości rozwiązań.

Dodatkową informacją jaką można wyciągnąć z powyższych równań jest zależność położenia samolotu w momencie emisji (pozycja identyfikacji akustycznej) od położenia samolotu w momencie odbioru (identyfikacja wzrokowa).

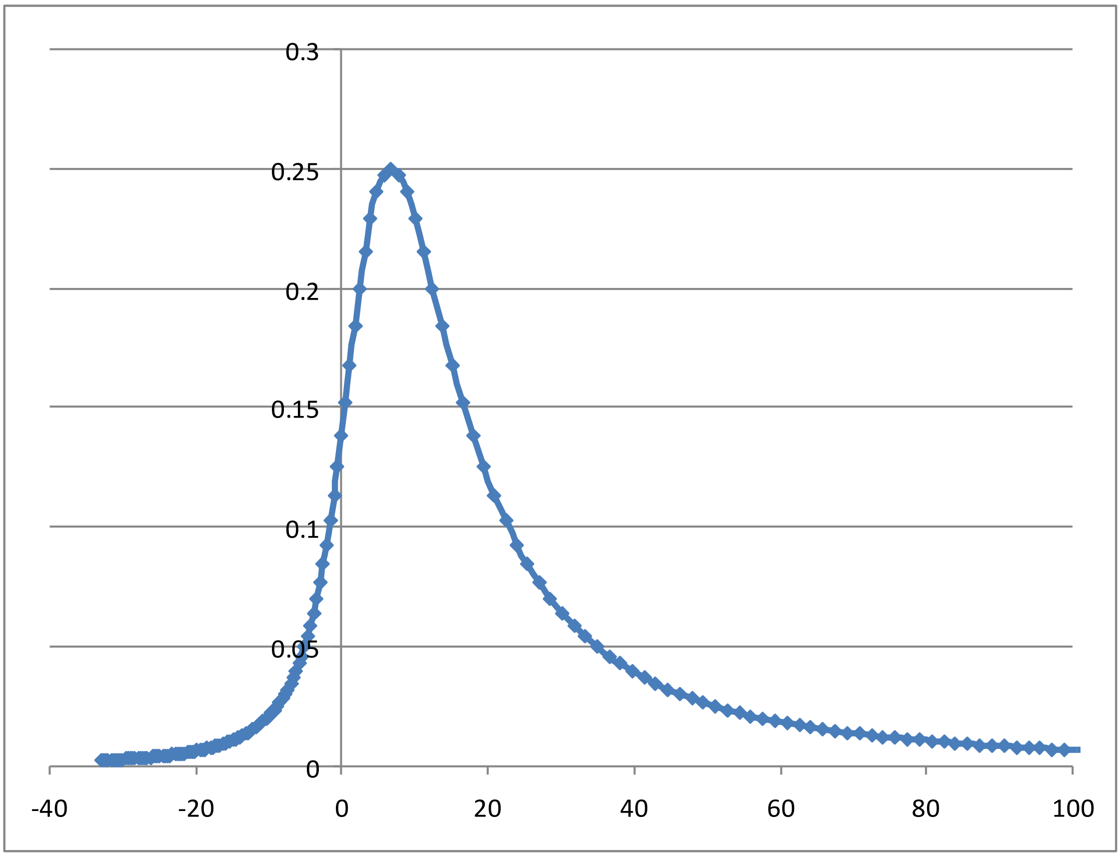
Zależność natężenia dźwięku od momentu jego emisji tzn. *I(t)* jest dość prosta. Poniższy rysunek pokazuje wykres *I(t)* dla D=2000m, V=200 m/s i stałej C=1000000.



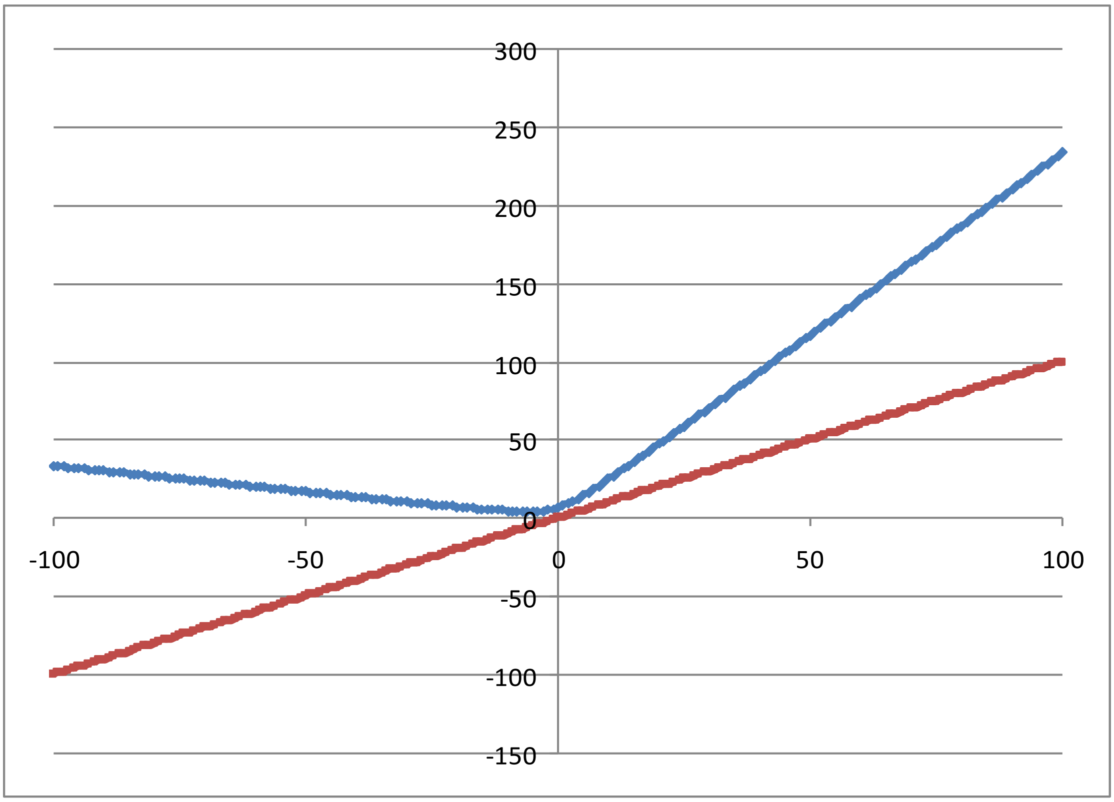
Zależność *T(t)* jest już wyraźnie zależna od tego czy prędkość samolotu jest poddźwiękowa czy naddźwiękowa. Poniżej pokazane są wykresy *T(t) i I(T)* dla V=200m/s.



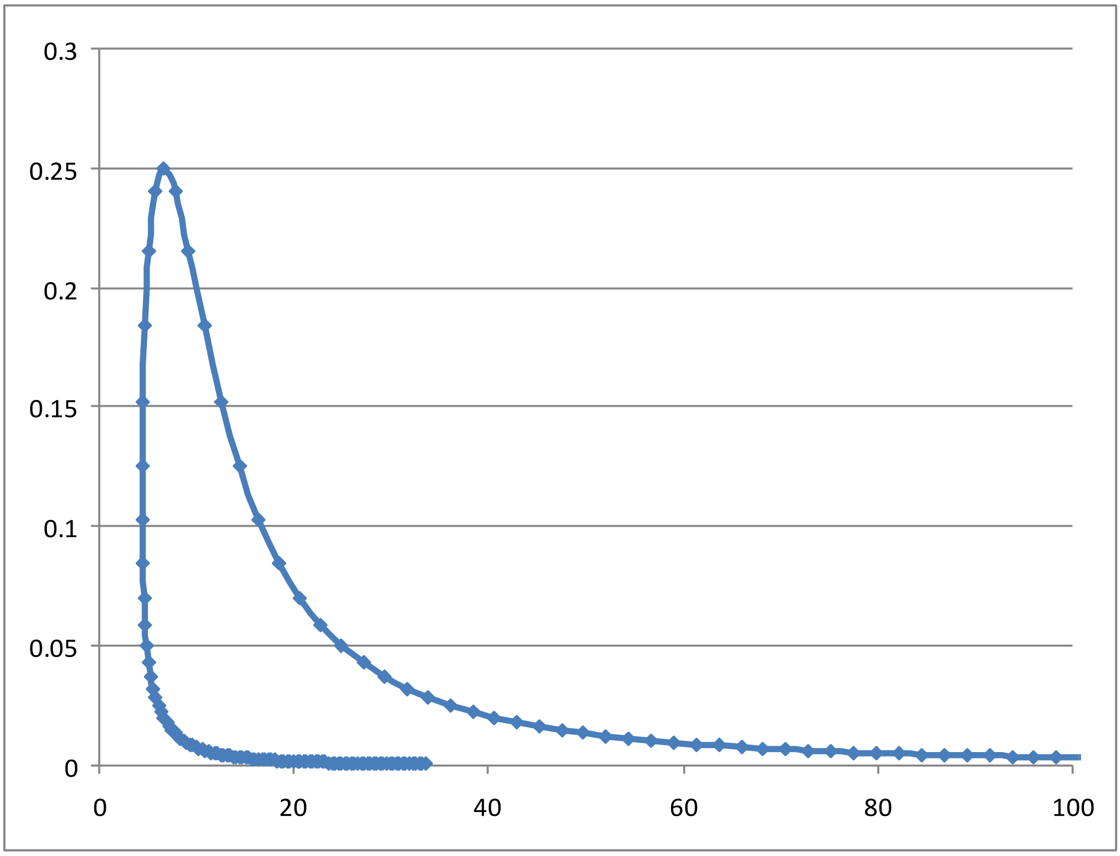
Wykres finalny *I(T)* dla v=200 m/s:



Poniżej analogiczne wykresy *T(t)* oraz *I(t)* dla V=400m/s (naddźwiękowa!).



Wykres finalny *I(T)* dla prędkości naddźwiękowej v=400 m/s:



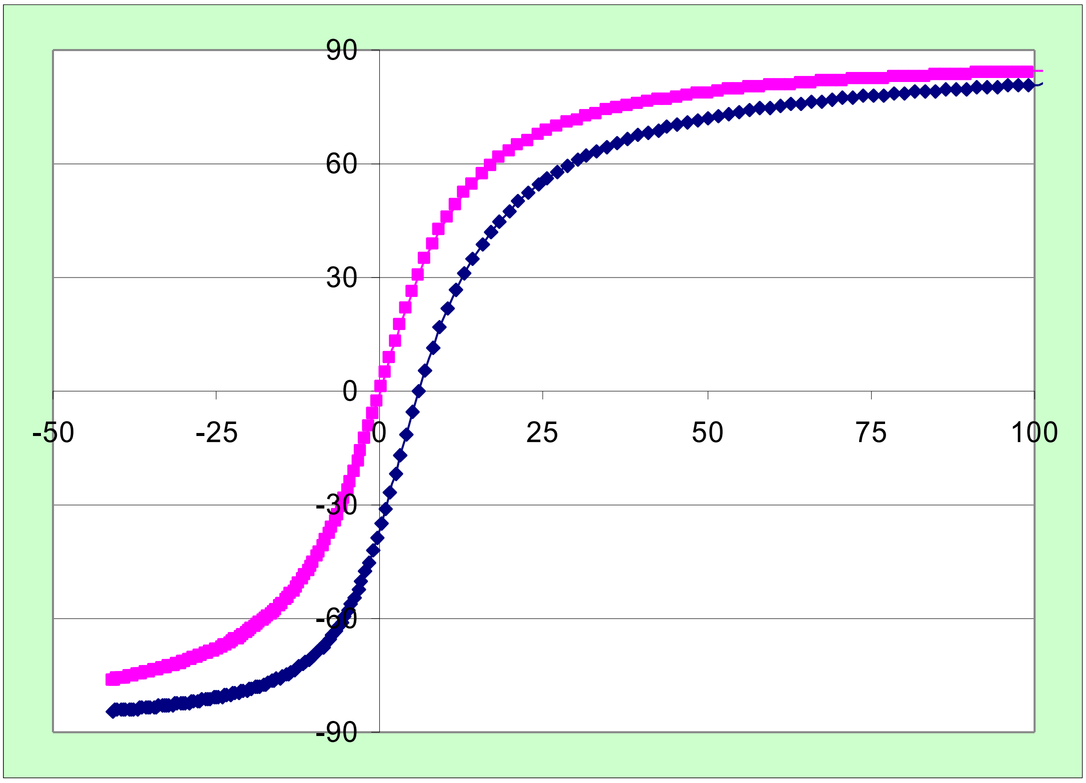
Wykres *I(T)* dla prędkości v=200 m/s nie zawiera w sobie nic szczególnie osobliwego, za wyjątkiem informacji, że natężenie dźwięku najpierw rośnie, potem maleje a maksimum natężenia dźwięku zaobserwujemy w chwilę po przelocie samolotu nad naszą głową.

Zupełnie inaczej jest dla przypadku prędkości naddźwiękowej v= 400 m/s. Z wykresu widzimy, że dla czasów obserwacji mniejszych ok. 5 s obserwator nie słyszy ŻADNEGO dźwięku od samolotu, mimo iż samolot jest już dla niego widoczny. Potem następuje moment krytyczny, w którym do obserwatora dochodzi w jednej chwili dźwięk wyemitowany w wielu wcześniejszych momentach (patrz wykres czasu odbioru od czasu emisji powyżej), co odbierane jest jako grom naddźwiękowy (supersonic boom). W następnych chwilach słyszymy jednocześnie cichy odgłos samolotu z przeszłości (niska gałąź wykresu) oraz głośny dźwięk z samolotu uciekającego o obserwatora w przód.

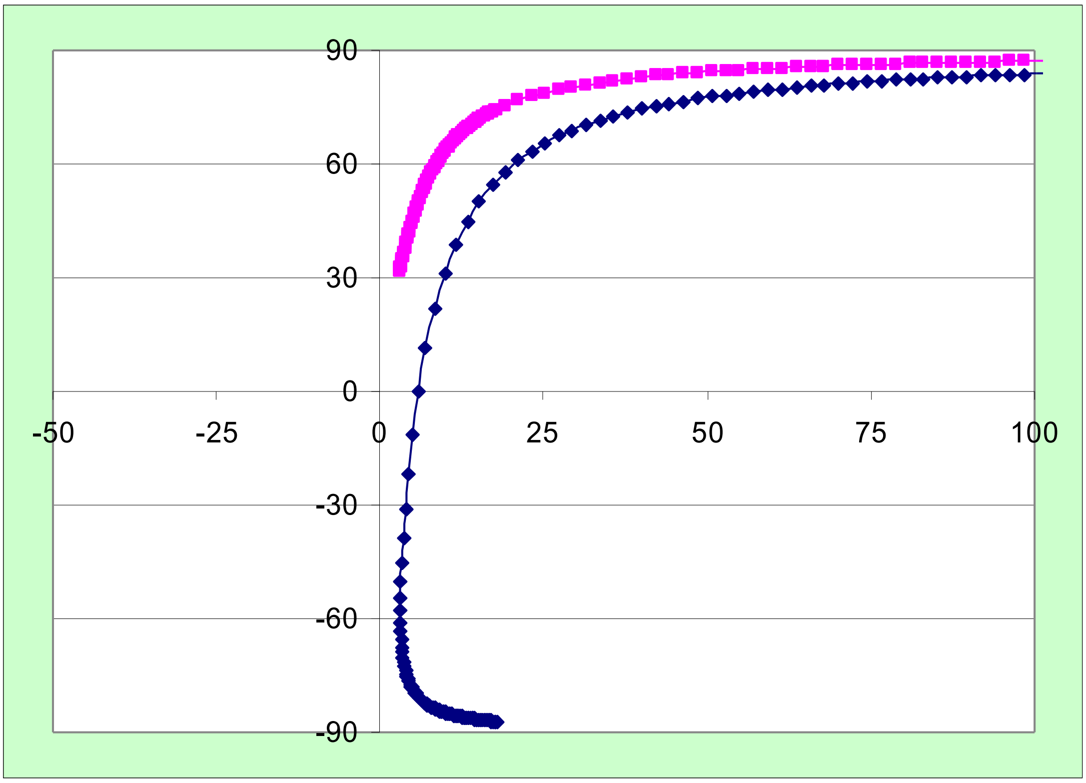
Dodatkowo z wyliczonych danych można wygenerować wykresy położenia samolotu w momencie emisji i w momencie odbioru w zależności od czasu odbioru dźwięku. Poniżej przedstawione są odpowiednie wykresy dla przypadków prędkości poddźwiękowej v=200 m/s oraz naddźwiękowej v=400 m/s.

W obu przypadkach wykres różowy oznacza położenie samolotu w momencie odbioru dźwięku (X_{odb}) , zaś wykres ciemnoniebieski położenie samolotu w momencie emisji dźwięku (X_{em}). W obu przypadkach na wykresie przedstawione są kąty w stosunku do kierunku zenitalnego, przy czym wartość -90 oznacza położenie początkowe tuż nad horyzontem, zaś +90 położenie końcowe nad horyzontem. Wartość równa 0 oznacza położenie zenitalne.

Wykres X_{em} oraz X_{odb} jako funkcji T dla V=200 m/s (obie funkcje jednoznaczne):



Wykres X_{em} oraz X_{odb} jako funkcji T dla V=400 m/s (podwójne wartości rozwiązań):



Jak widać po usłyszeniu dźwięku położenie samolotu w momencie emisji przyjmuje dwie wartości: jedną ujemną, z przeszłości, oraz dodatnią otrzymaną od odlatującego samolotu, ślizgającą się za jego położeniem widzialnym.