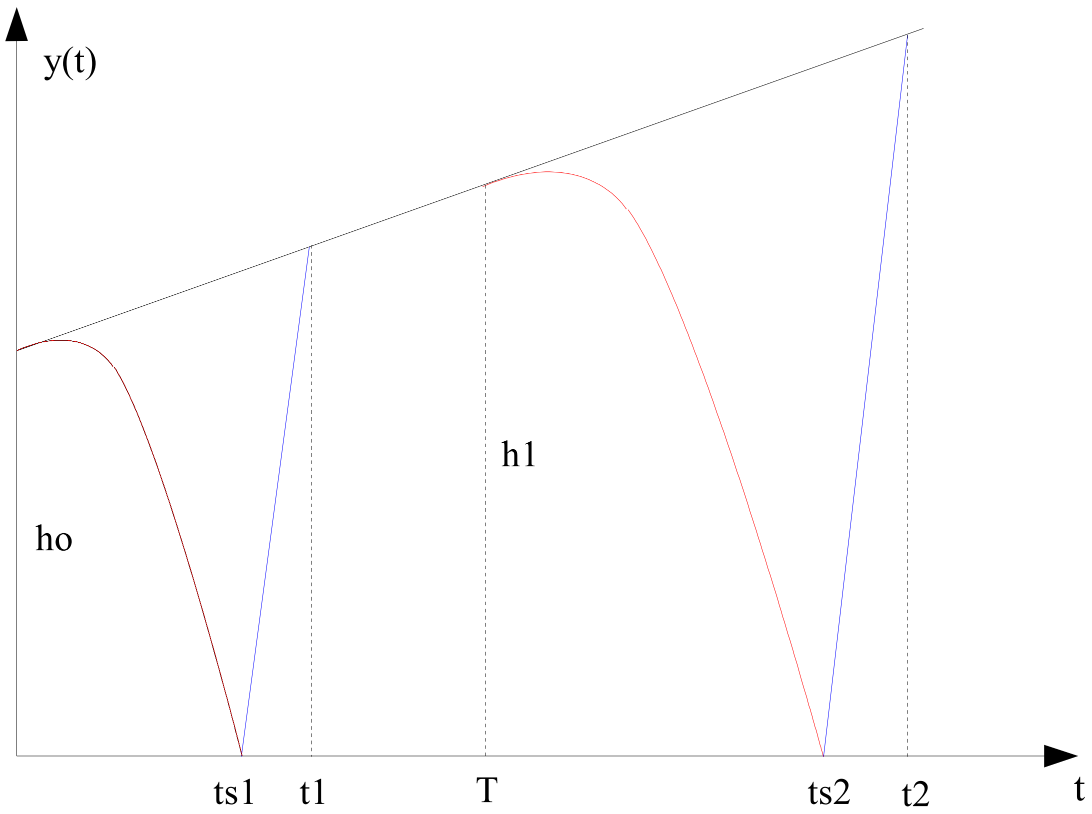
Problem nr 2 *Petardy rzucane z balonu*

Załogo wznoszącego się pionowo balonu wyrzuca z niego petardy, które eksplodują w zderzeniu z ziemią. Odstęp czasu między moemntami wyrzucenia kolejnych petard wynosi T = 20s. Odgłos pierwszego wybuchu piloci figlarze usłyszeli po czasie t_1 = 10s od momentu wyrzucenia pierwszej petardy. Odgłos wybuchu drugiej petardy doszedł do nich po t_2 = 32s od momentu wyrzucenia pierwszej. Obliczyć wysokość balonu w momencie wyrzucenia pierwszej petardy i szybkość jego wznoszenia, zakładając, że petardy zachowują się jak ciężkie, metalowe kulki dla których opór powietrza można pominąć.



Powyższy rysunek przedstawia wstępną analizę sytuacji, zaprezentowaną w postaci wykresu zależności y(t) dla wszystkich obiektów występujących w zadaniu tzn. balonu i dwóch rzuconych petard. Czerwone, paraboliczne krzywe dotyczą spadku petard, niebieskie linie proste obrazują przemieszczanie się dźwięku od miejsca wybuchu do gondoli balonu. Zakładamy, że piloci wypuszczają petardy z ręki bez prędkości początkowej względem gondoli balonu, co oznacza, że w momencie wypuszczenia mają one względem ziemi prędkość równą prędkości wznoszenia balonu Vb.

Oznaczmy moment upadku pierwszej petardy na ziemię jako t_{s1} . Jest to moment, w którym współrzędna y(t) dla pierwszej petardy staje się równa zero. Dla rzutu pionowego (przyspieszenie stałe i równe -g przy naszym wyborze układu odniesienia) wzór na położenie petardy w funkcji czasu pozwala nam zapisać równanie:

$$h_o + v_b t_{s1} - \frac{g t_{s1}^2}{2} = 0$$

Czas uderzenia w ziemię t_{s1} i czas dotarcia odgłosu wybuchu do balonu t_1 związane są następującą relacją:

$$t_{s1} = t_1 - \frac{h_o'}{v_d} \qquad h_o' = h_o + v_b t_1$$

gdzie h_o' jest wysokością balonu w momencie dotarcia do niego odgłosu wybuchu pierwszej petardy, zaś v_d jest prędkością dźwieku.

Po wstawieniu wartości h_o' do wzoru na t_{s1} otrzymujemy następującą relację dla czasów t_1 i t_{s1} :

$$t_{s1} = \left(1 - \frac{v_b}{v_d}\right) t_1 - \frac{h_o}{v_d}$$

Na drodze analogicznego rozumowania jako czas spadku drugiej petardy otrzymujemy:

$$t_{s2} - T = \left(1 - \frac{v_b}{v_d}\right)(t_2 - T) - \frac{h_1}{v_d}$$

Podobnie jak dla pierwszej petardy jej moment upadku na ziemie spełnia równanie wynikające z teorii rzutu poziomego:

$$h_1 + v_b(t_{s2} - T) - \frac{g(t_{s2} - T)^2}{2} = 0$$

gdzie h_1 jest wysokością balonu w momencie wyrzucenia drugiej petardy.

Dodatkowo wysokości h_1 i h_2 związane są następującą relacją:

$$h_1 = h_o + v_b T$$

Wstawienie tej relacji do poprzedniego równania i uwzględnienie równania ruchu pierwszej petardy daje razem:

$$h_o + v_b t_{s2} - \frac{g(t_{s2} - T)^2}{2} = 0 \qquad h_o + v_b t_{s1} - \frac{g t_{s1}^2}{2} = 0$$

Po uwzględnieniu relacji między h_1 a h_0 równania na t_{s1} i t_{s2} przyjmują postać:

$$t_{s1} = \left(1 - \frac{v_b}{v_d}\right) t_1 - \frac{h_o}{v_d} \qquad t_{s2} = \left(1 - \frac{v_b}{v_d}\right) t_2 - \frac{h_o}{v_d}$$

Od tego momentu można rozważyć dwa warianty rozwiązania:

- pełną, ***dokładną wersję rozwiązania***, uwzględniającą fakt ***skończonej prędkości sygnału dźwiękowego***
- ***rozwiązanie przybliżone***, zastępujące dźwięk światłem, czyli ***nośnikiem informacji o baaardzo dużej prędkości***.

Na początek ***rozwiązanie przybliżone***. Dla wersji która przyjmuje nieskończoną wartość prędkości propagacji v_d następuje utożsamienie czasów spadku i czasów dotarcia sygnału, tzn.

$$t_{s1}=t_1 \qquad t_{s2}=t_2$$

W takiej sytuacji otrzymane powyżej rónania przyjmują postać:

$$h_o+v_b t_2-\frac{g(t_2-T)^2}{2}=0 \qquad h_o+v_b t_1-\frac{g t_1^2}{2}=0$$

Odjęcie tych równań od siebie i wyliczenie v_b daje:

$$v_b=\frac{g}{2}\frac{(t_2-T)^2-t_1^2}{(t_2-t_1)}=10\ m/s$$

Wstawienie tej wartości do równania ruchu dla pierwszej petardy daje od razu:

$$h_o=\frac{g t_1}{2}\left[t_1-\frac{(t_2-T)^2-t_1^2}{(t_2-t_1)}\right]=400\ m$$

Teraz czas na ***podejście do rozwiązania pełnego***. Relacje między czasami spadku a czasami dotarcia sygnału można zapisać następująco:

$$t_{s1}=t_1-\frac{t_1}{v_d}v_b-\frac{h_o}{v_d} \qquad t_{s2}=t_2-\frac{t_2}{v_d}v_b-\frac{h_o}{v_d}$$

C.D.N