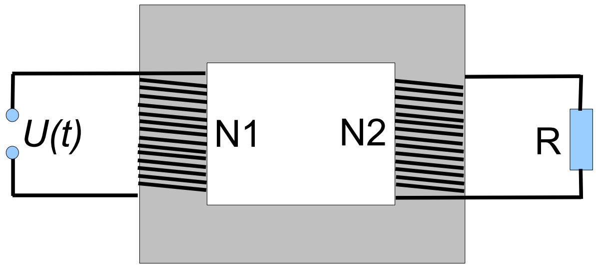
Transformator bezstratny – podstawowe równania

Założenia:

- obydwa uzwojenia są na tym samym rdzeniu, z jednakowymi karkasami, tzn. pole przekroju *S* i długość uzwojenia *l* są takie same dla obydwu uzwojeń: pierwotnego i wtórnego
- indukcyjność każdego z uzwojeń traktujemy w wersji idealnej, tzn jak dla długiego solenoidu
- pełne sprzężenie magnetyczne między uzwojeniami, czyli wsp. indukcyjności wzajemnej M jest średnią geometryczną indukcyjności obu uzwojeń



Równania:

$$U(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = 0 \qquad M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = I_2 R \qquad (1a, b)$$

Po przepisaniu równań:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = U(t) \qquad -M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = -R I_2$$

Pomnożenie pierwszego równania przez M, drugiego przez L_1 a następnie dodanie równań do siebie prowadzi do eliminacji prądu w uzwojeniu pierwotnym I_1 i otrzymania następującego równania na I_2 :

$$\left(L_1 L_2 - M^2\right) \frac{dI_2}{dt} + R L_1 I_2 = M U(t)$$

Przy założeniu warunku pełnego sprzężenia uzwojeń: $L_1 L_2 = M^2$ otrzymujemy bardzo prosty związek na prąd w uzwojeniu wtórnym I_2 :

$$I_2 = \frac{M}{R L_1} U(t) \qquad \frac{dI_2}{dt} = \frac{M}{R L_1} \frac{dU(t)}{dt} \qquad (2a, b)$$

Z pierwszego równania dla obwodu pierwotnego możemy otrzymać wyrażenie na pochodną prądu I_1 :

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U(t)}{L_1} - \frac{M}{L_1} \frac{dI_2}{dt}$$

Po wstawieniu otrzymanej wcześniej pochodnej prądu I_2 do ostatniego równania na pochodną prądu I_1 dostajemy:

$$\frac{dI_1}{dt}=\frac{U(t)}{L_1} - \frac{L_2}{R\,L_1}\frac{dU(t)}{dt} \qquad (3)$$

Równanie to pozwala jednoznacznie wyliczyć prąd w uzwojeniu pierwotnym przy danym przebiegu napięcia na wejściu.

Rozwiązanie na prąd w uzwojeniu wtórnym (2a) jest jeszcze prostsze po wykorzystaniu założeń odnośnie indukcyjności cewek i wsp. sprzężenia:

$$L_1=\mu\frac{N_1^2 S}{l} \qquad L_2=\mu\frac{N_2^2 S}{l} \qquad M=\mu\frac{N_1 N_2 S}{l}$$

Mamy wtedy:

$$I_2(t)=\frac{N_2}{N_1}\frac{U(t)}{R} \qquad U_2(t)=R\,I_2(t)=\frac{N_2}{N_1}U(t)$$

Jak z tego widać napięcie na uzwojeniu wtórnym jest dokładnym naśladowaniem przebiegu czasowego napięcia na wejściu, pomnożonym przez przekładnię transformatora N_2/N_1 .

Jawna postać rozwiązania na prąd w uzwojeniu pierwotnym I_1 zależy od postaci przebiegu napięcia na uzwojeniu pierwotnym transformatora. Stosunkowo łatwe rozwiązanie można uzyskać gdy napięcie na wejściu ma postać

$$U(t)=U_o\cos(\omega t)=\Re\left[\hat{U}_o e^{i\omega t}\right]$$

Wtedy prąd w obwodzie wejściowym ma postać:

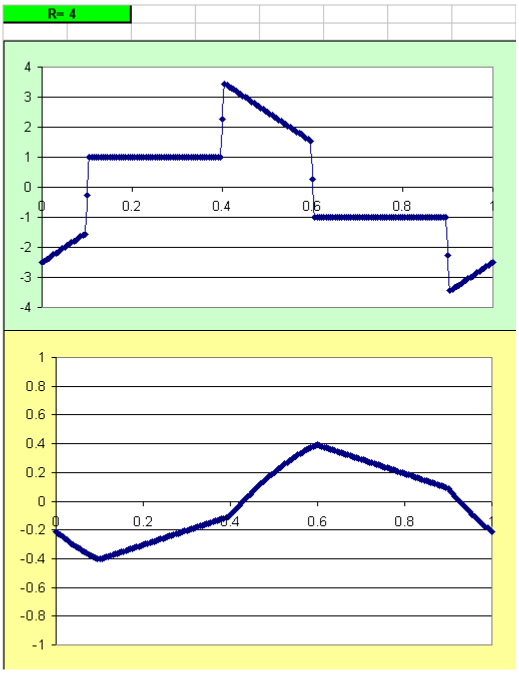
$$\hat{I}_1(t) = \frac{U(t)}{\omega L}e^{i\pi/2}-\frac{N_2^2}{N_1^2}\frac{U(t)}{R} = \hat{I}_o(t)+I_R(t) = I_o(t)-\frac{N_2}{N_1}I_2(t)$$

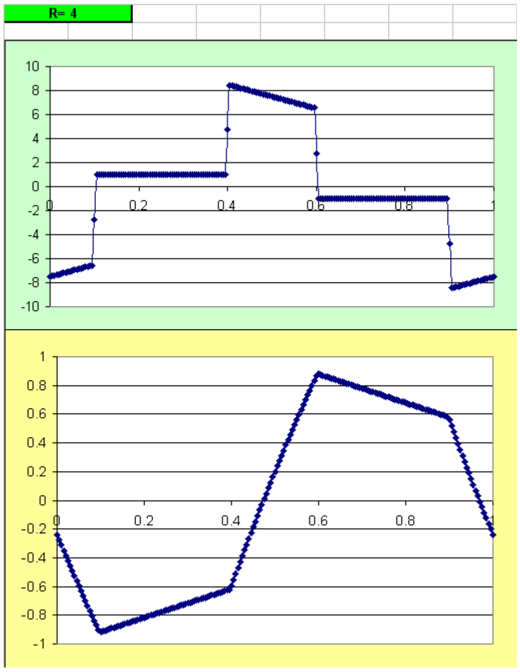
gdzie I_o jest prądem spoczynkowym, obecnym nawet bez obciążenia układu i przesuniętym w fazie o kąt $\pi/2$, zaś I_R jest prądem wynikającym bezpośrednio z obciążenia opornikiem R, będącym w przeciwfazie do prądu w uzwojeniu wtórnym.

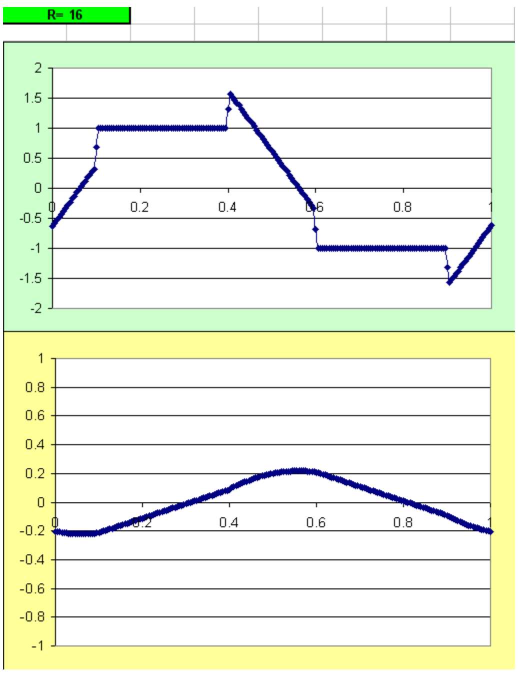
Przy pominięciu prądu spoczynkowego dostajemy stare, znane ze szkoły równanie na prądy w transformatorze:

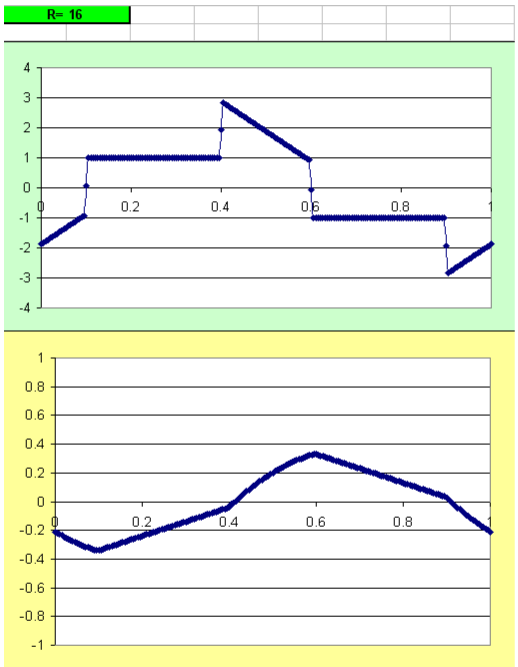
$$I_2(t)=-\frac{N_1}{N_2}I_1(t)$$

Przykłady dla sygnału wejściowego w postaci przełączanego napięcia +/- 1V, ze skończonym nachyleniem zbocza przełączającego. Na rysunkach przebiegi pochodnej czasowej i samej wartości prądu w obwodzie wejściowym. Lewa kolumna dla $L_2=1$, $L_1=1$, prawa kolumna dla $L_2=3$, $L_1=1$. Wartości opornika podane na rysunkach.



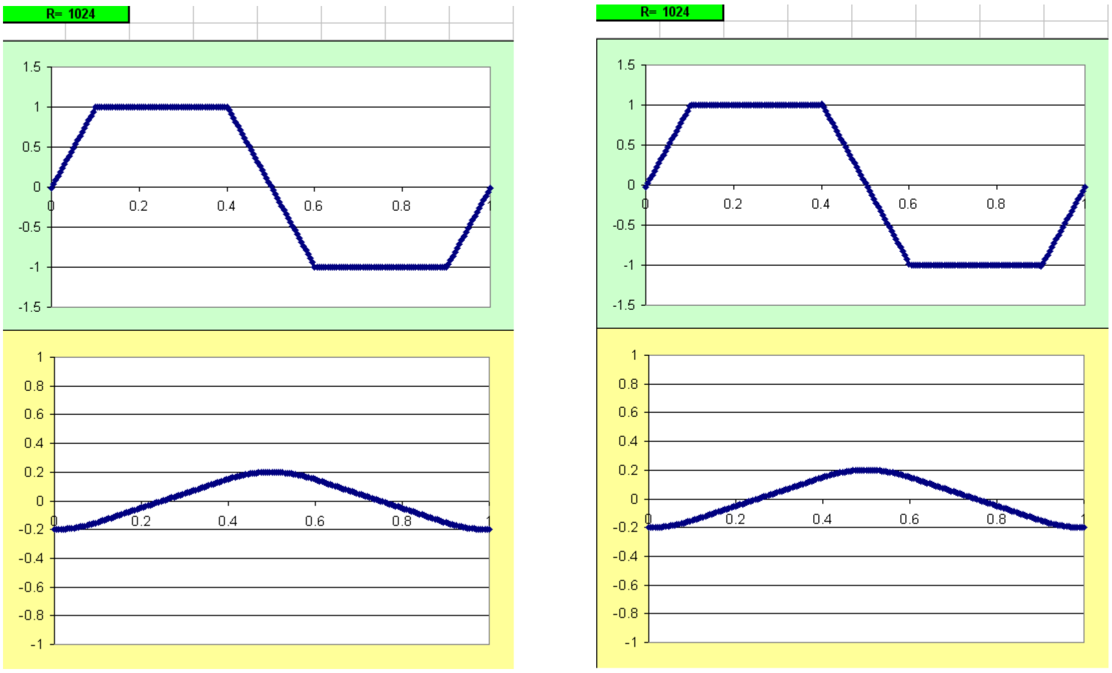






Widać wyraźnie wpływa wartości oporności obciążenia na przebieg prądu w obwodzie pierwotnym oraz na jego wartość maksymalną.

Ostatnia wersja zrobiona jest dla R=1024 Ω , czyli dla sytuacji kiedy obwód wtórny jest praktycznie nieobciążony i płynący w nim prąd jest prawie zerowy. W takiej sytuacji dla obwodu pierwotnego przebieg pochodnej prądu jest praktycznie zgodny z przebiegiem napięcia wejściowego (jednakowym dla wszystkich pokazanych przypadków).



Wykres zależności prądu wejściowego od czasu (górny, żółta ramka) tylko przypomina sinusoidę, tak naprawdę jest fragmentów paraboli i linii prostych (jest to funkcja pierwotna dla wykresu górnego, zielona ramka), czyli pochodnej prądu po czasie.