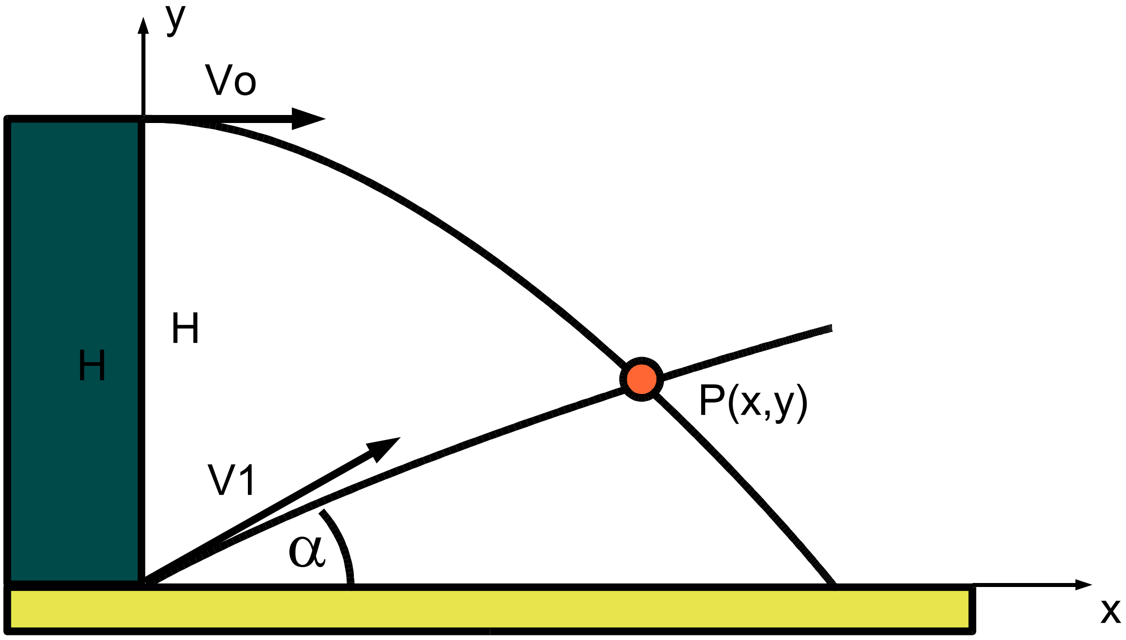
Problem nr 1 *Zestrzeliwanie "rzutki"*

Z punktu umieszczonego na krawędzi urwiska na wysokosci H=20m nad poziomem plaży wystrzelona zostaje poziomo "rzutka" z prędkością Vo=30m/s. Na plaży u podnóża urwiska stoi strzelec, dysponujący urządzeniem wyrzucającym pociski z prędkością V_1 = 60m/s. Pod jakim kątem do poziomu powinien wycelować aby uzyskać trafienie pocisku w rzutkę. Rozważyć dwie sytuacje: kiedy strzelec wystrzeliwuje pocisk w momencie wystrzelenia rzutki oraz kiedy wystrzeliwuje pocisk z opóźnieniem T=1s.



Jeżeli w rozwiązaniu pominiemy opór powietrzna (który jest bardzo istotny, ale nadmiernie komplikuje rozwiązanie) to ruch obu obiektów można opisać przez równania odpowiednio rzutu poziomego i rzutu ukośnego. Pozwala to na bezpośrednie napisanie zależności współrzędnych x i y od czasu dla ruchu rzutki i ruchu pocisku. ***W przypadku kiedy pocisk wystrzeliwany jest w tym samym momencie co rzutka*** odpowiednie równania moją postać:

$$\begin{cases} x_1(t)=v_o\, t \\ y_1(t)=H-\dfrac{g\,t^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t)=v_1 t\cos(\alpha) \\ y_2(t)=v_1 t\sin(\alpha)-\dfrac{g\,t^2}{2} \end{cases}$$

Warunkiem na to aby rzutka i pocisk znalazły się w tym samym miejscu w tym samym czasie jest jednoczesna równość współrzędnych x i y rzutki i pocisku w momencie zderzenia t_z. Prowadzi to do układu równań:

$$\begin{cases} v_o t_z=v_1\, t_z\cos(\alpha) \\ H-\dfrac{g\,t_z^2}{2}=v_1\, t_z\sin(\alpha)-\dfrac{g\,t_z^2}{2} \end{cases}$$

Z pierwszego z równań od razu otrzymujemy warunek, niezależny od czasu zderzenia, określający jednoznacznie kąt, pod którym należy wystrzelić pocisk. Z drugiego równania otrzymujemy warunek na czas zderzenia t_z. Warunki te mają odpowiednio postać:

$$\cos(\alpha)=\frac{v_o}{v_1} \qquad t_z=\frac{H}{v_1 \sin(\alpha)}$$

Do pełnego rozwiązania problemu potrzebne jest wyliczenie czasu zderzenia i współrzędnych punktu zderzenia P(x,y). Z warunku na cos(α) otrzymujemy:

$$\sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha)=1-\frac{v_0^2}{v_1^2}=\frac{v_1^2-v_0^2}{v_1^2}$$

Podstawiając wyrażenie na sin(α) do drugiego warunku otrzymujemy:

$$t_z=\frac{H}{\sqrt{v_1^2-v_0^2}} \qquad x_z=v_0\, t_z=\frac{H\, v_0}{\sqrt{v_1^2-v_0^2}}$$

$$y_z=H-\frac{g\, t_z^2}{2}=H\left(1-\frac{g\, H}{2(v_1^2-v_0^2)}\right)$$

Stanowi to kompletne rozwiązanie problemu z punktu widzenia matematycznego. Jednak realna fizyczna sytuacja narzuca dwa dodatkowe ograniczenia na możliwość realizacji trafienia. Pierwszy warunkek jest dość oczywisty: $\cos(\alpha)\leq 1$ czyli $v_1 \geq v_0$. Drugi warunek nie jest jednak taki oczywisty. Jest nim żadanie aby punkt zderzenia znajdował się “nad ziemią”, czyli na cześci toru realizowanej fizycznie. Warunek ten można zapisać najprościej jako $y_z \geq 0$. Daje to bezpośrednio warunek na prędkości:

$$v_1^2-v_0^2 \geq \frac{gH}{2}$$

Druga wersja rozwiązania problemu, uzględniająca opóźnienie wystrzału w stosunku do momentu wyrzucenia “rzutki” jest bardziej skomplikowana, ale też daje się dokładnie rozwiązać w ramach matematyki na poziomie szkoły średniej.

Jeżeli czas jest liczony od momentu wystrzelenia rzutki to czas lotu pocisku jest krótszy od czasu lotu rzutki o T. W takiej sytuacji równania ruchu dla pocisku przyjmują postać:

$$\begin{cases} x_2(t)=v_1(t-T)\cos(\alpha) \\ y_2(t)=v_1(t-T)\sin(\alpha)-\frac{g}{2}(t-T)^2 \end{cases}$$

Porównanie odpowiednich współrzędnych dla momentu zderzenia t_z daje równania:

$$v_0\, t_z = v_1\,(t_z - T)\cos(\alpha) \qquad H - \frac{g\, t_z^2}{2} = v_1\,(t_z - T)\sin(\alpha) - \frac{g}{2}(t_z - T)^2$$

Przekształcenie równań prowadzi do następującego finalnego układu równań na nieznane wartości kąta oraz momentu zderzenia:

$$\begin{cases} [v_1 \cos(\alpha) - v_0]\, t_z = v_1\, T\cos(\alpha) \\ [v_1 \sin(\alpha) + g\, T]\, t_z = H + v_1\, T\sin(\alpha) + \dfrac{g\, T^2}{2} \end{cases}$$

Eliminacja czasu zderzenia t_z poprzez wyliczenie go z pierwszego równania i wstawienie do drugiego daje jedno (niezby miłe) równanie na kąt:

$$v_1\, H\cos(\alpha) = v_0\, v_1\, T\sin(\alpha) + v_0\, H$$

Łatwo sprawdzić, że dla czasu opóźnienia T równego zero równanie grzecznie przechodzi w równanie znane z prostszego, rozpatrywanego wcześniej, przypadku. Po wyliczeniu z tego równania wartości $\cos^2(\alpha)$ i wykorzystaniu “jedynki trygonometrycznej” dostajemy jedno równanie kwadratowe na wartość $\sin^2(\alpha)$:

$$(1 + a^2)\sin^2(\alpha) + 2\, ab\sin(\alpha) + b^2 - 1 = 0$$

gdzie:

$$a = \frac{v_o T}{H} \qquad b = \frac{v_o}{v_1}$$

Rozwiązanie tego równania, po uwzględnieniu faktu że interesują nas tylko dodatnie wartości $\sin^2(\alpha)$, ma postać:

$$\sin(\alpha) = \frac{-ab + \sqrt{1 - a^2 - b^2}}{1 + a^2}$$

czyli finalnie:

$$\sin(\alpha) = \frac{\dfrac{-v_o^2\, T}{v_1\, H} + \sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{v_1^2} - \dfrac{v_0^2\, T^2}{H^2}}}{1 + \dfrac{v_0^2\, T^2}{H^2}}$$

Wtedy rozwiązanie na czas zderzenia wyrażone przez znaleziony sinus kąta wystrzału ma postać:

$$t_z = \frac{H + v_1 T \sin(\alpha) + 0.5\, g\, T^2}{v_1 \sin(\alpha) + g\, T}$$

Powstaje oczywiście pytanie jak teraz wyglądają warunki okreslające możliwośc fizycznej realizacji zderzenia. Prosty warunek z pierwszej wersji rozwiązania ($v_1 \geq v_0$) zostaje zastąpiony przez znacznie bardziej skomplikowany warunek określony przez fakt, że otrzymane powyżej rozwiązanie na sinus kąta wystrzału musi leżeć w przedziale (0,1). Drugi warunek, narzucany przez wymaganie aby zderzenie nastąpiło nas ziemią, można teraz określić jako warunek na czas zderzenia, który powinien być krótszy niż czas lotu rzutki (jest to warunek dokładnie równoważny warunkowi użytemu dla pierwszego przypadku rozwiązania). Warunek ten przyjmuje postać:

$$t_z < \sqrt{\frac{2\, H}{g}}$$

Dokładna numeryczna analiza znalezionych rozwiązań przedtawiona jest w arkuszu kalkulacyjnym ***probl_m1.xls,*** zamieszczonym na stronie z rozwiązaniami problemów.