ABC matematyki dla początkujących fizyków.

Algebra wektorów

■ wektor w układzie współrzędnych kartezjańskich ■ dodawanie (odejmowanie) ■ iloczyn skalarny ■ iloczyn wektorowy ■ iloczyny wielokrotne ■ użyteczne tożsamości

1 Wektory

Jest oczywiste, że dla opisu szeregu wielkości fizycznych nie wystarczy podanie wartosci liczbowej danej wielkości ale należy określić również jej kierunek w przestrzeni oraz zwrot (takimi są przykładowo wielkości: prędkość, siła, moment pędu, natężenie pola elektrycznego, ... etc.). Mówimy wtedy o nich: wielkości wektorowe lub *wektory*, w odróżnieniu od wielkości *skalarnych*, dla których kierunek nie jest istotny (np. masa, temperatura, praca, ...).

W zapisie, dla zaznaczenia, że dana wielkość jest wektorem, najczęściej używa sie strzałki nad symbolem wielkości lub stosuje pogrubioną czcionkę:

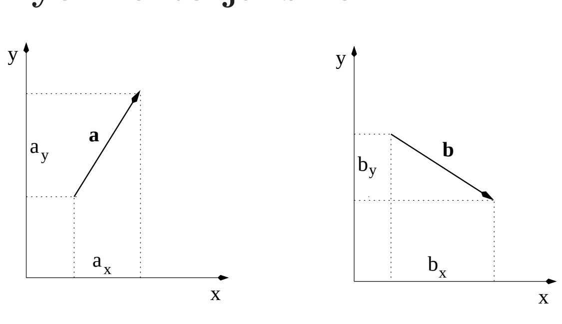
$$\vec{a} \quad \text{lub} \quad \mathbf{a}$$

(pamiętaj, że jeśli napiszesz samo a to będzie to oznaczało wartość (długość) wektora, a więc skalar - jest to częsta przyczyna popełniania błędów).

Długość wektora można oznaczać dwojako: a lub $|\vec{a}|$.

Wektor o długości 1 nazywa się *wektorem jednostkowym* lub *wersorem* i zapisuje najczęściej przy pomocy "daszka": $\hat{a}$. Każdy wektor można przekształcić w wektor jednostkowy dzieląc go przez długość: $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{a}$.

2 Wektor w układzie współrzędnych kartezjańskich



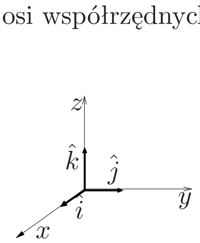
Kierunek i zwrot wektora w przestrzeni określamy względem obranego (dowolnie) układu współrzędnych. Może to być zwykły układ kartezjański (x, y, z)[1]. Aby jednoznacznie określić wektor w przestrzeni wystarczy podać wartości jego prostopadłych rzutów na osie układu. Te rzuty nazywamy *składowymi wektora*. Ilustruje to powyższy rysunek (przykładowo dla układu płaskiego). Zwróć uwagę, że w tym przykładzie obie składowe a_x, a_y wektora $\vec{a}$ są dodatnie, natomiast wektor $\vec{b}$ ma ujemną składową b_y i dodatnią b_x (objaśnij dlaczego!).

Składowe jednoznacznie określają wektor:

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y) \quad \text{(w płaskim układzie współrzędnych)},$$
$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) \quad \text{(w przestrzeni trójwymiarowej)}.$$

2.1 Wektory bazowe

Wprowadzamy trójkę wektorów jednostkowych $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, wzajemnie prostopadłych; każdy z tych wektorów pokazuje kierunek i zwrot danej osi współrzędnych [2].



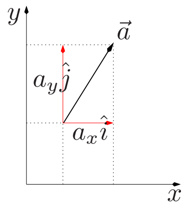
Przy ich pomocy konstruujemy wektory $a_x\hat{i}$, $a_y\hat{j}$, $a_z\hat{k}$ i z kolei, stosując znaną regułę dodawania wektorów, możemy dany wektor $\vec{a}$ przedstawić w postaci

$$\boxed{\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}.}$$

Graficznie ilustruje to poniższy rysunek (dla układu płaskiego).

[1] często wystarczą dwie osie (x, y) (układ płaski), lub nawet jedna (układ liniowy)

[2] wektory bazowe dla układów innych niż kartezjański (biegunowy, sferyczny, cylindryczny) znajdziesz w tekście *układy_współrzędnych.pdf* – *"abecadło matematyczne początkującego fizyka"*



$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa nietrudno pokazać, że długość wektora oblicza się według wzoru

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.}$$

3 Działania na wektorach

Dla wektorów określa sie następujące działania:

- dodawanie i odejmowanie wektorów[3],
- mnożenie wektora przez skalar,
- mnożenie skalarne wektora przez wektor (wynik: skalar),
- mnożenie wektorowe wektora przez wektor (wynik: wektor).

Nie ma natomiast dzielenia przez wektor, tej operacji nie da się jednoznacznie określić.

3.1 Dodawanie (odejmowanie)

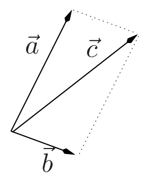
• Wektory dodajemy dodając do siebie odpowiednie składowe:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k},}$$

przy odejmowaniu – składowe odejmujemy.

• Wektory można dodawać (odejmować) graficznie stosując znaną regułę równoległoboku.

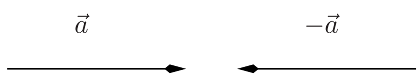
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



3.2 Mnożenie wektora przez skalar

• Mnożąc wektor $\vec{a}$ przez liczbę m dostajemy wektor o długości ma, o takim samym kierunku i zwrocie jeśli liczba m jest dodatnia. W przypadku gdy liczba jest ujemna zwrot zmienia sią na przeciwny.

• W szczególności, mnożenie przez -1 powoduje zmianę zwrotu wektora.



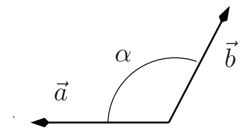
[3] nie ma sensu dodawanie wektora i skalara!

3.3 Iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Ten typ mnożenia zaznaczamy stawiając kropkę między wektorami.

Definicja: W wyniku mnożenia skalarnego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ otrzymujemy skalar równy iloczynowi długości obu wektorów i kosinusa kąta między wektorami.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\alpha}$$



Z definicji wynikają następujące wnioski:

• Iloczyn skalarny wyrażony przez składowe wektorów[4]:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ .}$$

• Kosinus kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}, \vec{b}$ wyraża się następująco

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.}$$

• Kwadrat wektora jest równy długości wektora do kwadratu:

$$\boxed{\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2\cos 0 = a^2.}$$

• Warunkiem koniecznym i wystarczającym prostopadłości wektorów jest zerowanie się iloczynu skalarnego:

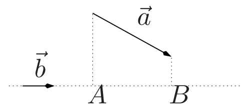
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \leftrightarrows \quad \vec{a} \perp \vec{b}.}$$

W szczególności, zachodzą relacje:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1,$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0.$$

• Rzut wektora $\vec{a}$ na kierunek wyznaczony przez wektor $\vec{b}$ (odcinek AB) dany jest wyrażeniem

$$\boxed{AB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}.}$$



3.4 Iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$

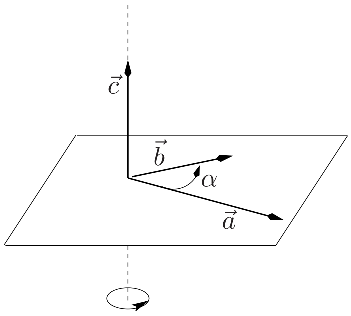
Iloczyn wektorowy zapisujemy używając znaku $\times$.

Definicja: W wyniku mnożenia wektorowego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ otrzymujemy wektor (nazwijmy go $\vec{c}$) taki, że:

- długość $\vec{c}$ wynosi $|\vec{c}| = ab\sin\alpha$,
- kierunek jest prostopadły do obu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (czyli do płaszczyzny, na której leżą),
- zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej[5].

[4] wyprowadź ten wzór samodzielnie wykonując mnożenie $(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$ wyraz po wyrazie

[5] Tę regułę stosujemy następująco: obracamy pierwszy wektor $\vec{a}$ na płaszczyźnie $(\vec{a}, \vec{b})$ w kierunku wektora $\vec{b}$ (obieramy kąt mniejszy od 180^o). Zwrot będzie w tę stronę, w którą będzie się wkręcać śruba prawoskrętna wykonująca taki obrót.



Iloczyn wektorowy jest nieprzemienny: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Zmieniając kolejność mnożenia zmieniasz zwrot wektora $\vec{c}$.

Iloczyn wektorowy wektorów równoległych jest równy zero (bo sinus kąta 0^o lub 180^o jest równy zero)

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \leftrightarrows \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.}$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0, \\ \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Iloczyn wektorowy można wyrazić poprzez składowe wektorów następująco, pisząc go przy pomocy wyznacznika:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

(Uwaga: kolejność wierszy w wyznaczniku jest istotna! Zamiana miejscami wiersza składowych $\vec{a}$ i wiersza składowych $\vec{b}$ skutkuje zmianą znaku iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ na przeciwny, tak jakbyśmy obliczali $\vec{b} \times \vec{a}$.)
Po rozwinięciu wyznacznika względem elementów pierwszego wiersza wzór przyjmuje postać[6]:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}.}$$

3.5 Iloczyn mieszany

Iloczynem mieszanym trzech wektorów nazywamy iloczyn skalarny jednego z nich przez iloczyn wektorowy dwóch pozostałych:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \,.$$

Iloczyn mieszany jest więc skalarem. Zachodzą związki:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \,.$$

Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego trzech wektorów jest równa objętości V równoległościanu rozpiętego na tych wektorach.

Iloczyn mieszany można wyrazić poprzez składowe wektorów następująco, pisząc go przy pomocy wyznacznika:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

[6] wyprowadź ten wzór samodzielnie wykonując mnożenie $(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$ wyraz po wyrazie

4 Użyteczne twierdzenia i tożsamości

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta utworzonego przez wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Iloczyny wielokrotne

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$