

## 10. Maxwellowski rozkład prędkości

### Przestrzeń fazowa.

Do pełnego opisu układu potrzebna jest w mechanice klasycznej znajomość współrzędnych uogólnionych ( $q$ ) i pędów uogólnionych ( $p$ ). Przestrzeń, która jest zbudowana na tych współrzędnych i pędach, to **przestrzeń fazowa**.

$f$  - liczba stopni swobody

$P_r \propto \exp[-\beta E_r]$  - dla rozkładu kanonicznego i wybranego poziomu energetycznego.

W mechanice klasycznej możemy zapisać:

$$P(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f = C \cdot \exp[-\beta E(q_1, \dots, q_f)] dq_1 \dots dq_f$$

$$\int P(q_1, \dots, p_f) dq_1 \dots dp_f = 1 \text{ - warunek normalizujący}$$

### Maxwellowski rozkład prędkości.

Rozważamy gaz w stanie równowagi. Jaki jest rozkład prędkości cząsteczek takiego gazu?

Założmy, że w naszych warunkach dozwolony jest klasyczny opis cząsteczek gazu i zajmijmy się szczegółowiej dowolną jednoatomową jego cząsteczką. Taka cząsteczka przedstawia dla nas niewielki, wyróżniony układ znajdujący się w kontakcie termicznym ze zbiornikiem ciepła złożonym z pozostałych cząsteczek gazu i mającym temperaturę  $T$ . W przypadku, gdy można zaniedbać siły zewnętrzne, energia naszej cząsteczki jest po prostu jej energią kinetyczną

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Możemy postawić teraz pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo, że wektor położenia cząsteczki ma wartość z przedziału  $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$  oraz że jednocześnie wartości pędu cząsteczki znajdują się w przedziale  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$ .

$$P(r, p) d^3 r d^3 p \propto \exp\left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m}\right)\right] d^3 r d^3 p$$

$$P(r, V) d^3 r d^3 V \propto \exp\left[-\frac{1}{2} \beta m V^2\right] d^3 r d^3 V$$

gdzie  $d^3 V = dV_x dV_y dV_z$  oraz  $d^3 r = dx dy dz$

Można zapytać, ile cząsteczek ma prędkość w określonym przedziale prędkości.

$f(V)d^3V$  - średnia liczba cząsteczek na jednostkę objętości, które mają prędkość zawartą w przedziale  $V, V + dV$ .

Ponieważ  $N$  cząsteczek gazu porusza się niezależnie, prawie nie oddziałując na siebie, więc gaz ten przedstawia statystyczny zbiór cząsteczek, z których pewien ułamek określany prawdopodobieństwem  $P(r, V)$  znajduje się pomiędzy  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ , a prędkość pomiędzy  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{V}+d\mathbf{V}$ . Średnia liczba  $f(V)d^3V$  jest zatem równa iloczynowi prawdopodobieństwa  $P(r, V)d^3r d^3V$  i całkowitej liczby cząsteczek  $N$  podzielonemu przez element objętości  $d^3r$ . Zatem

$$f(V)d^3V = \frac{NP(r, V)d^3r d^3V}{d^3r}$$

$$f(V)d^3V = C \exp\left[-\frac{1}{2}\beta m V^2\right] d^3V$$

gdzie  $C$  jest współczynnikiem proporcjonalności.

Równanie to nosi nazwę **maxwellowskiego rozkładu prędkości**.

Zauważmy, że ani prawdopodobieństwo  $P(r, V)$ , ani też średnia liczba  $f$  nie zależą od położenia  $\mathbf{r}$  cząsteczki, ponieważ nie może mieć ona uprzywilejowanego położenia w przestrzeni, w przypadku gdy na układ nie działają żadne siły zewnętrzne.  $P(r, V)$  zależy tylko od modułu wektora  $\mathbf{V}$ , a nie zależy od kierunku.

### **Rozkład szybkości.**

$F(V)dV$  -średnia liczba cząsteczek na jednostkę objętości, których szybkość  $|V|$  znajduje się pomiędzy  $V$  i  $V + dV$

$$F(V) dV = 4\pi V^2 f(V) dV$$

$$F(V) dV = 4\pi V^2 C \cdot \exp\left[-\frac{m V^2}{2kT}\right] dV$$

Zależność  $F(V)$  jako funkcję modułu prędkości pokazuje poniższy rysunek. Szybkość  $V = \tilde{v}$  odpowiadającą maksimum rozkładu  $F(V)$  nosi nazwę najbardziej prawdopodobnej szybkości. Można ją znaleźć przyrównując do zera pochodną:

$$\frac{dF}{dV} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dV} \left[ 4\pi V^2 C \exp \left[ -\frac{mV^2}{2kT} \right] \right]$$

$$\left[ -\beta m V \exp \left( -\frac{1}{2} \beta m V^2 \right) \right] V^2 + \exp \left( -\frac{1}{2} \beta m V^2 \right) 2V = 0$$

$$\tilde{V} = \sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Np. dla cząsteczek azotu w temperaturze pokojowej  $\tilde{V} = 420 \frac{m}{s}$

Po normalizacji, maxwellowski rozkład szybkości ma postać: ]

$$F(V) dV = 4\pi V^2 \left( \frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{mV^2}{2kT} \right] dV$$

Liczymy średnią energię cząsteczki gazy doskonałego:

$$\overline{\varepsilon_K} = \int_0^\infty \frac{mV^2}{2} F(V) dV = \int_0^\infty 2\pi V^4 m \left( \frac{m\beta}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{mV^2}{2kT} \right] dV = \frac{4kT}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty x^4 \exp(-x^2) dx}_{\frac{3}{8}\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2} kT$$