Ćwiczenie 2

Zależność okresu drgań wahadła od amplitudy

Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z ruchem drgającym i parametrami opisującymi ten ruch. Wyznaczenie zależności okresu drgań od amplitudy dla układu zbliżonego do wahadła matematycznego. Doświadczalne badanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla błędów przypadkowych.

Wprowadzenie

Ruchem harmonicznym nazywamy ruch, w którym wychylenie jest sinusoidalną funkcją czasu. Z ruchem takim mamy do czynienia wtedy, gdy działająca siła zwrotna jest proporcjonalna do wychylenia. Przykładem drgań harmonicznych w szerokim zakresie amplitudy drgań jest np. ruch ciężarka zawieszonego na sprężynie (ćwicz. 7).

Ruch dowolnego wahadła, zarówno matematycznego jak i fizycznego, jest harmoniczny jedynie dla małych wychyleń, dla których słuszne jest przybliżenie $\sin\theta = \theta$. Ruch wahadła opisuje wtedy równanie

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -m\,g\,a\,\theta, \tag{1}$$

którego wyprowadzenie i znaczenie symboli przedstawiono w ćwiczeniu 1.

Dla ruchu harmonicznego okres drgań nie zależy od amplitudy. Jest to ściśle związane z faktem, że równanie (1) jest równaniem różniczkowym *liniowym, jednorodnym*. Dla równań tego typu obowiązuje twierdzenie, że jeżeli funkcja $\theta(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ jest rozwiązaniem równania, to rozwiązaniem jest również jej iloczyn przez dowolną stałą, $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Stała A reprezentuje fizycznie amplitudę drgań. Postać funkcji $\theta(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ i jej parametry (ω, a zatem i okres $T = 2\pi/\omega$) pozostają przy tym nie zmienione.

Dla wychyleń dużych przybliżenie $\sin\theta = \theta$ nie jest słuszne, a równanie opisujące ruch wahadła

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -m\,g\,a\sin\theta, \tag{2}$$

staje się jednorodnym równaniem różniczkowym *nieliniowym*. Nieliniowym, gdyż niewiadoma $\theta(t)$ nie występuje w pierwszej potędze, lecz jest argumentem funkcji sinus.

Jakie własności charakteryzują drgania swobodne w układach nieliniowych? Powstający ruch pozostaje ruchem okresowym, ale nie jest harmoniczny, tj. zależność wychylenia z położenia równowagi od czasu nie może być opisana pojedynczą sinusoidą. Ponadto okres ruchu staje się zależny od amplitudy drgań.

Nieliniowe równania różniczkowe są znacznie trudniejsze do rozwiązania od liniowych i w wielu przypadkach jedyną praktyczną metodą są obliczenia numeryczne przy użyciu komputera. W przypadku nieliniowego wahadła jest możliwe rozwiązanie analityczne, oparte o metodę rozwijania funkcji w szereg. Przedstawiamy jego najważniejszy rezultat – wyrażenie na okres drgań wahadła w funkcji maksymalnej amplitudy drgań θ_m w postaci nieskończonego szeregu

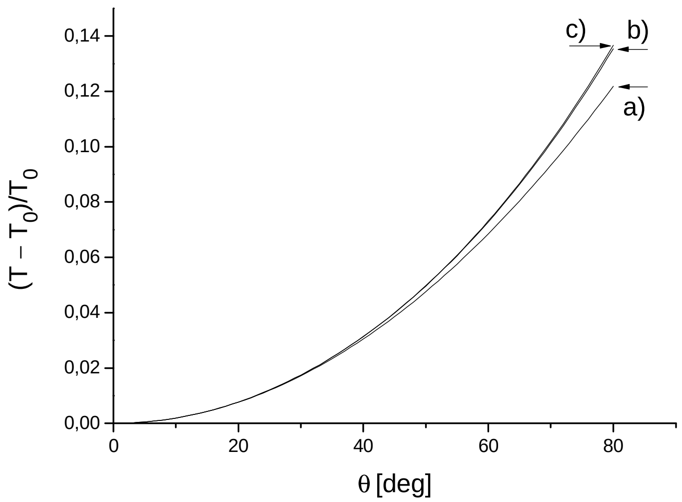
$$T = T_0\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_m}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_m}{2}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\theta_m}{2}+...\right]. \tag{3}$$

Stała T_0 oznacza wartość okresu drgań dla małych kątów wychylenia (dokładnie – w granicy $\theta \to 0$), równą $2\pi\sqrt{l/g}$.

Przez rozwinięcie funkcji sinus w szereg potęgowy ($\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - ...$) wzór (3) można przekształcić do postaci

$$T = T_0\left[1+\frac{1}{16}\theta_m^2+\frac{11}{3072}\theta_m^4+...\right], \tag{4}$$

gdzie kąt maksymalnego wychylenia θ_m jest wyrażony w radianach. Rysunek 1 pokazuje, że wzór (4) wystarczająco dokładnie opisuje obserwowaną zależność $T(\theta_m)$ w zakresie wychyleń do sześćdziesięciu stopni.



Rys. 1. Wykresy zależności względnej zmiany okresu od amplitudy drgań:
a) przybliżenie $(1/16)\theta_m^2$, b) przybliżenie $(1/16)\theta_m^2 + (11/3072)\theta_m^4$,
c) wynik praktycznie dokładny (wielomian (3) 10 stopnia).

W ćwiczeniu sprawdza się doświadczalnie zależność okresu T od amplitudy drgań θ_m . Ponieważ zmiana okresu, nawet dla znacznych wartości amplitudy drgań θ_m, jest niewielka, więc wygodnie jest przedstawiać wyniki doświadczalne jako względną zmianę okresu, $(T - T_0)/T_0$, którą porównujemy z zależnością teoretyczną

$$\frac{T-T_0}{T_0} = \frac{1}{16}\theta_m^2 + \frac{11}{3072}\theta_m^4 . \tag{5}$$

Wartość T_0 wyznaczamy przez pomiar okresu dla małych wychyleń.

Pomiar okresu dla małych wychyleń.

W instrukcji wykonawczej tego ćwiczenia jak i innych wykorzystujących wahadła spotykamy zalecenie, by amplituda drgań θ_m nie przekraczała zadanej wartości, zazwyczaj 3°. Skąd wynika taka właśnie wartość maksymalnej amplitudy?

W eksperymencie mierzymy np. czas 25 okresów. Zależna od refleksu eksperymentatora niepewność pomiaru interwału czasu $u(25T)$ jest rzędu 0,1 s. Zatem niepewność jednego okresu jest 25 razy mniejsza, $u(T)$ = 0,004 s. Jeżeli pomiar taki powtórzymy np. 6 razy, niepewność zmaleje do wartości circa $u(T) = 0{,}004/\sqrt{6}\ \mathrm{s} = 0{,}0016\ \mathrm{s}$. Typowa wartość okresu to 1 s, zatem odpowiadająca niepewność względna to $u(T)/T = 0{,}0016$.

Błąd systematyczny spowodowany skończoną wartością amplitudy określa (wzór (5)) czynnik $\theta_m^2/16$. Możemy go pominąć jeżeli jest o rząd wielkości – czyli 10 razy – mniejszy od przyjętej niepewności. Uzyskujemy zatem nierówność

$$\frac{1}{16}\theta_m^2 < \frac{u(T)/T}{10},$$

z której otrzymujemy $\theta_m < 0{,}046$ rad = 2,6°. Przyjmujemy w zaokrągleniu, że wychylenie nie powinno przekraczać 3 stopni.

Badanie funkcji rozkładu prawdopodobieństwa dla błędu przypadkowego.

Pojęcie i własności histogramu doświadczalnego oraz jego porównanie z rozkładem teoretycznym opisano w Dodatku B2. Łatwy w realizacji pomiar okresu drgań może dostarczyć np. 100 wyników pomiaru potrzebnych do sporządzenia histogramu.

Literatura

Wyprowadzenie wzoru (5), ale tylko z dokładnością do wyrazu $\theta_m^2/16$, przedstawiono w podręczniku: Kittel C., Knight W. D., Ruderman M. A.: *Mechanika*. Warszawa, PWN 1969.