

Nazwisko i imię:	Zespół:	Data:
------------------	---------	-------

## Ćwiczenie nr 12 – Moduł sztywności

**Cel ćwiczenia:** Wyznaczenie modułu sztywności pręta metodą dynamiczną

### Literatura

- Zięba A. (red). *Pracownia Fizyczna Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej SU1648*. AGH. Kraków 2002 (ew. wydania wcześniejsze).
- Szydłowski M. *Pracownia fizyczna* Warszawa. PWN 1999
- Szczeniowski S. *Fizyka doświadczalna* T. I. Warszawa. PWN 1980

### Zagadnienia do opracowania

- Opisz ruch harmoniczny (parametry opisujące ten ruch:  $A$  - amplituda,  $T$  - okres,  $\varphi$  - przesunięcie fazowe itd.).
- Podaj równania różniczkowe ruchów harmonicznych: prostego i tłumionego oraz rozwiązania tych równań.
- Podaj definicję momentu bezwładności i omów twierdzenie Steinera. Jak obliczyć moment bezwładności pierścienia oraz walca?
- Omów prawo Hooke'a i jego związek z ruchem harmonicznym.
- Moduł sztywności i moduł Younga - podaj definicje i jednostki.
- Omów różnice pomiędzy statyczną i dynamiczną metodą pomiaru modułu sztywności metali.
- Wyprowadź wzór podający związek między parametrami drutu a momentem siły działającej na niego.
- Wahadło fizyczne - wyprowadź wzór na okres drgań dla małych kątów.

Ocena i  
podpis


Ocena z odpowiedzi:

--

W celu obliczenia momentów bezwładności  $I_0$  brył korzystamy ze wzorów:

- dla pierścienia

$$I_{0p} = \frac{M}{2} (R_z^2 + R_w^2) \quad (2)$$

- dla czterech ciężarków

$$I_{0c} = 4 \cdot \left( \frac{1}{2} m r_c^2 + m a^2 \right) \quad (3)^*$$

\* - w przypadku, gdy uznajemy ciężarek za obiekt punktowy ( $r_c = 0$ ) korzystamy ze wzoru:

$$I_{0c} = 4 \cdot m a^2 \quad (4)$$

gdzie:  $a$  – odległość środka ciężarka od osi wibratora. Wariant ćwiczenia określa prowadzący.

### Niepewności pomiarowe

Niepewność wyznaczenia wartości modułu sztywności obliczamy z poniższego wzoru (5):

$$u(G) = \delta \pi \sqrt{\left( \frac{\Delta I}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)} \right)^2 + \left( \frac{\Delta l}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)} \right)^2 + \left( \frac{2T_2 \Delta T_2}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)^2} \right)^2 + \left( \frac{2T_1 \Delta T_1}{r^4 (T_2^2 - T_1^2)^2} \right)^2 + \left( \frac{4l \Delta r}{r^5 (T_2^2 - T_1^2)} \right)^2}$$

Niepewność momentów bezwładności brył wyznaczamy kolejno ze wzorów:

$$u(I_{0p}) = \sqrt{\left( \frac{\partial I}{\partial M} \Delta M \right)^2 + \left( \frac{\partial I}{\partial R_w} \Delta R_w \right)^2 + \left( \frac{\partial I}{\partial R_z} \Delta R_z \right)^2} \quad (6)$$

$$u(I_{0c}) = \sqrt{\left( \frac{\partial I}{\partial m} \Delta m \right)^2 + \left( \frac{\partial I}{\partial a} \Delta a \right)^2} \quad (7)^*$$

\*- uwaga, w wariancie z  $r_c = 0$  proszę wziąć poprawkę na niepewność wyznaczenia promienia ciężarka  $\Delta r_c = 1$  [mm]

Przy czym przyjąć, że:

$$\begin{aligned} \Delta M &= 1 \text{ [g]} & \Delta m &= 1 \text{ [g]} \\ \Delta R_w &= 1 \text{ [mm]} & \Delta a &= 0,01 \text{ [mm]} \\ \Delta R_z &= 1 \text{ [mm]} \\ \Delta l &= 1 \text{ [mm]} & \Delta r &= 0,01 \text{ [mm]} \end{aligned}$$

Szacowanie niepewności standardowej okresu drgań (zadaniem studenta jest wybrać jedną z dwóch poniższych metod szacowania niepewności (a. b) oraz uzasadnić dokonany wybór\*)

a) niepewność standardowa wynikająca z wielokrotnego pomiaru:

$$u_1(T_0) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_{0i} - \bar{T}_0)^2}{n(n-1)}} \quad (10)$$

b) całkowita (złożona) niepewność:

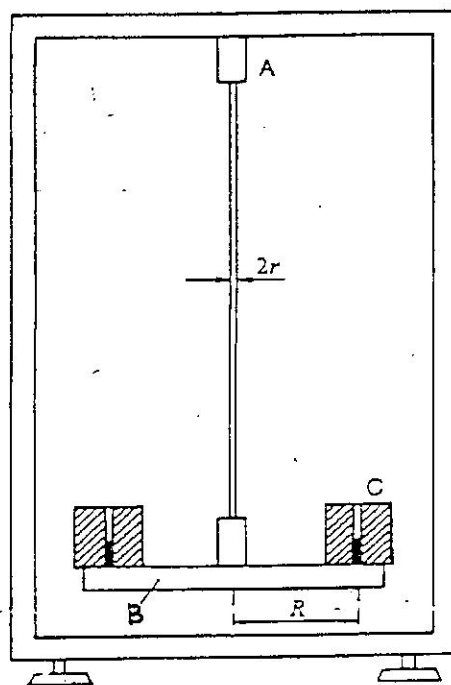
$$u_c(T_0) = \sqrt{[u_1(T_0)]^2 + [u_2]^2} \quad (11)$$

gdzie:  $u_1$  – niepewność standardowa wynikająca z wielokrotnego pomiaru,  $u_2 = 0,2s$  – niepewność związana z reakcją człowieka (patrz przykład 6 ćwiczenie 0)

(\*jeżeli prowadzący ćwiczenie nie zaleci inaczej)

## 2. Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierz długość  $l$  badanego drutu za pomocą przymiaru milimetrowego (długość mierz bez nakrętek na końcach drutu). Wykonaj 10-krotny pomiar średnicy ( $2r$ ) za pomocą śruby mikrometrycznej - w różnych miejscach drutu i oblicz jej wartość średnią. Wyniki wpisz do tabeli (odpowiednio 1a, 1b, 2a, 2b, 2c).
2. Zważ pierścień obciążający ( $M$ ), zmierz jego wymiary geometryczne: średnicę zewnętrzną  $R_z$  i wewnętrzną  $R_w$ .
3. Zmierz masę  $m$  krążków obciążających, ich promień  $r_c$  (zależnie od wariantu ćwiczenia) oraz odległość środków tych krążków od osi obrotu wibratora ( $a$ ).
4. Górny koniec badanego drutu przymocuj do statywu za pomocą uchwytu A. Drugi koniec przymocuj do wibratora B tak, by jego środek ciężkości oraz punkt zawieszenia znajdowały się na jednej pionowej linii. (Uwaga: luzy w mocowaniach drutu mogą zafałszować wyniki pomiaru okresu drgań)



Rys. 2. Układ pomiarowy.

5. Zmierz czas  $10 + 20$  pełnych drgań wibratora nie obciążonego. Kąt wychylenia wibratora z położenia równowagi ma być nie większy niż  $5^\circ$ . Pomiar wykonaj 6-krotnie. Umieść wyniki w tabeli.
6. Obciąż wibrator pierścieniem i powtórz czynności opisane w punkcie 5.
7. Następnie obciąż wibrator dodatkowo czterema ciężarkami i ponownie powtórz czynności z pkt. 5.
8. Analogiczne pomiary wykonaj dla drutów wykonanych z różnych metali, obciążając je kolejno pierścieniem i ciężarkami (warianty ćwiczenia określa prowadzący).

### Warianty ćwiczenia

Forma ciężarka:

- obiekt punktowy ( $r_c = 0$ )    w formie walca ( $r_c \neq 0$ )

Niepewność okresu drgań:

- wariant a)    wariant b)

Pręty:

- stalowy    miedziany    mosiężny

Obciążenie:

- jeden pierścień    dwa pierścienie    cztery ciężarki

### 3. Wyniki pomiarów:

Tabela 1a: Moment bezwładności pierścienia

Masa $M$ [kg]	
Promień zewnętrzny $R_z$ [m]	
Promień wewnętrzny $R_w$ [m]	
Moment bezwładności $I_{0p}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	

Tabela 1b: Moment bezwładności ciężarków

Masa $m$ [kg]	
Promień $r_c$ [m]	
Odległość od osi wibratora $a$ [m]	
Moment bezwładności $I_{0c}$ [kg·m <sup>2</sup> ]	

Tabela 2a: Drut pierwszy

Rodzaj materiału:	Długość drutu [m]:							
Srednica [mm]								
Średnia średnica [m] :								
Czasy drgań wibratora nie obciążonego $t_1$ [s]:								
$T_1$ okres drgań (średni) [s] :								
Czasy drgań wibratora obciążonego (pierścień)								
$t_2$ [s]:								
$T_2$ okres drgań (średni) [s] :								
Czasy drgań wibratora obciążonego (pierścień +								
ciężarki) $t_3$ [s]:								
$T_3$ okres drgań (średni) [s] :								
Moduł sztywności $G$ (pierścień) [GPa] :								
Moduł sztywności $G$ (pierścień + ciężarki) [GPa] :								
Moduł sztywności $G$ (wartość tablicowa) [GPa] :								

Tabela 2b: Drut drugi

Rodzaj materiału:	Długość drutu [m]:							
Srednica [mm]								
Średnia średnica [m] :								
Czasy drgań wibratora nie obciążonego $t_1$ [s]:								
$T_1$ okres drgań (średni) [s] :								
Czasy drgań wibratora obciążonego (pierścień)								
$t_2$ [s]:								
$T_2$ okres drgań (średni) [s] :								
Czasy drgań wibratora obciążonego (pierścień +								
ciężarki) $t_3$ [s]:								
$T_3$ okres drgań (średni) [s] :								
Moduł sztywności $G$ (pierścień) [GPa] :								
Moduł sztywności $G$ (pierścień + ciężarki) [GPa] :								
Moduł sztywności $G$ (wartość tablicowa) [GPa] :								

podpis

**Tabela 2c: Drut trzeci**

Rodzaj materiału:	Długość drutu [m]:									
Srednica [mm]										
Srednia srednica [m] :										
Czasy drgań wibratora nie obciążonego $t_1$ [s]:										
$T_1$ okres drgań (średni) [s] :										
Czasy drgań wibratora obciążonego (pierścień) $t_2$ [s]:										
$T_2$ okres drgań (średni) [s] :										
Czasy drgań wibratora obciążonego (pierścień + ciężarki) $t_3$ [s]:										
$T_3$ okres drgań (średni) [s] :										
Moduł sztywności $G$ (pierścień) [GPa] :										
Moduł sztywności $G$ (pierścień + ciężarki) [GPa] :										
Moduł sztywności $G$ (wartość tablicowa) [GPa] :										

*podpis*

#### 4. Opracowanie wyników

1. Na podstawie znajomości masy oraz wymiarów geometrycznych oblicz moment bezwładności pierścienia  $I_{0p}$  oraz ciężarków  $I_{0c}$  (wzór 2 i 3). Z prawa przenoszenia błędów wyznacz niepewności obliczonych momentów bezwładności (wzór 6 i 7). Wyniki zapisz w tabeli 1.
2. Oblicz wartość średnią średnicy drutu oraz jej niepewność standardową jako odchylenie standardowe średniej.
3. Dla zmierzonych wartości okresów  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  oblicz wartości średnie i błąd standardowy (wzór 10 lub 11).
4. Oblicz wartość modułu sztywności  $G$  (wzór 1) kolejno dla drutu obciążonego samym pierścieniem, a następnie dla drutu obciążonego pierścieniem i czterema ciężarkami. Wyniki zapisz w tabeli.
5. Przeprowadź dyskusję błędów wyznaczonych modułów sztywności za pomocą prawa przenoszenia błędów (wzór 5).
6. Uzyskane wartości  $G$  porównaj z wartością tablicową dla danego materiału (tablice są dostępne w laboratorium). Rozstrzygnij, czy otrzymany wynik zgadza się (w granicach niepewności pomiarowej) z wartością tablicową.
7. Analogiczne obliczenia przeprowadź dla drutów wykonanych z różnych materiałów.