Ćwiczenie 33

Kondensatory

Cel ćwiczenia

Pomiar pojemności kondensatorów powietrznych i z warstwą dielektryka w celu wyznaczenia stałej elektrycznej ε_0 i przenikalności względnych ε_r różnych materiałów.

Wprowadzenie

Kondensator jest układem przewodników oddzielonych warstwą izolatora. Przez pojemność kondensatora C rozumiemy stosunek ładunku Q do napięcia między okładkami U

$$C = \frac{Q}{U}\,. \tag{1}$$

Popularny, acz uproszczony wzór na pojemność kondensatora płaskiego

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}, \tag{2}$$

wyraża wartość C jako funkcję powierzchni okładki S, odległości między okładkami d, współczynnika ε_0 = 8,854 pF/m nazwanego stałą elektryczną* i przenikalności elektrycznej ε_r materiału między okładkami kondensatora (tab. 1).

Ze wzoru (2) wynika, że dla wyznaczenia stałych ε_0 i ε_r należy zmierzyć pojemność kondensatorów o znanych wymiarach geometrycznych, próżniowego i wypełnionego dielektrykiem.

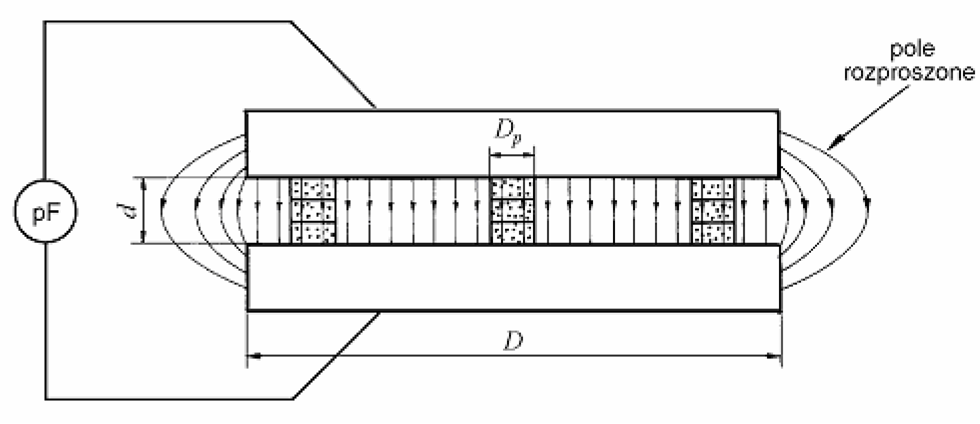
Wyznaczanie stałej elektrycznej ε_0

W naszym eksperymencie przybliżeniem kondensatora próżniowego jest kondensator powietrzny (rys. 1). Okładkami kondensatora są kołowe płyty metalowe. Określoną odległość między płytami uzyskuje się przez umieszczenie w trzech miejscach stosu izolujących krążków. Do pomiaru pojemności kondensatora stosujemy cyfrowy miernik pojemności.

Wartości ε_0 nie możemy wyznaczać wprost ze wzoru (2) z dwóch powodów. Po pierwsze krążki określające odległość d między płytami wykonane są z materiału o przenikalności dielektrycznej ε_r znacznie większej od jedności, co powoduje powiększenie całkowitej pojemności kondensatora.

---

* Uwaga: zgodnie z decyzjami ISO (International Organisation for Standarization) oraz IEC (International Electrotechnical Commission) z roku 1990 dla symbol ε_0 oraz μ_0 wprowadzono nazwy **stała elektryczna** i **stała magnetyczna**” (ang. *electric constant*, *magnetic constant*). Tradycyjne terminy „przenikalność elektryczna próżni” i „przenikalność magnetyczna próżni” spotkać można w starszych podręcznikach, np. w poprzednich wydaniach podręcznika Hallidaya i Resnicka..



Rys. 1. Powietrzny kondensator płaski z trzema słupkami z dielektryka.

Kondensator nasz potraktować można jako równoległe połączenie kondensatora z dielektrykiem o przenikalności względnej ε_r i łącznej powierzchni okładek równej 3 S_p (gdzie S_p jest powierzchnią jednego krążka) oraz kondensatora próżniowego, o powierzchni okładek równej $S - 3\,S_p$.

Pojemność całkowita wynosi

$$C = \frac{\varepsilon_0 (S - 3S_p)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r 3S_p}{d} \,. \tag{3}$$

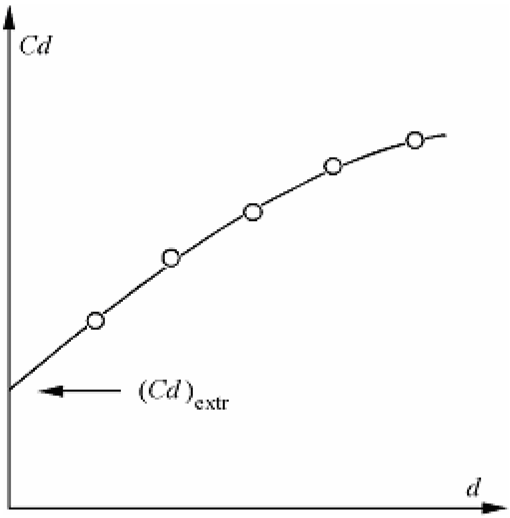
Z wzoru (3) wartość ε_0 obliczamy jako

$$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{S + 3(\varepsilon_r - 1)S_p} \,. \tag{4}$$

Druga istotna poprawka wynika z istnienia tzw. pola rozproszonego. Wzór (2) jest w istocie wzorem przybliżonym. Jego wyprowadzenie przy użyciu prawa Gaussa [1] opiera się na upraszczającym założeniu, że pole E ma wartość stałą we wnętrzu kondensatora i raptownie znika poza jego krawędzią. Z praw elektrostatyki wynika, że poza brzegami kondensatora istnieje niejednorodne (o zakrzywionych liniach sił) pole elektryczne, nazywane *polem rozproszonym* (rys. 1). Pole rozproszone powoduje dodatkowy wzrost pojemności kondensatora, w konsekwencji wartość ε_0 wyliczona wprost z wzoru (4) byłaby zawyżona.

Dla danej geometrii płyt odpowiednią poprawkę można obliczyć teoretycznie przez numeryczne obliczenie rozkładu pola przy brzegu kondensatora. W naszym ćwiczeniu zastosujemy doświadczalny sposób eliminacji wpływu pola rozproszonego. Efektywna „objętość” pola rozproszonego jest rzędu $2\pi r d^2$, gdyż pole to zajmuje z grubsza pas o wysokości i szerokości rzędu d wokół obwodu kołowych płyt kondensatora. Natomiast objętość pola jednorodnego wewnątrz kondensatora wynosi $\pi r^2 d$. Względny udział pola rozproszonego, będący stosunkiem tych objętości, wynosi $2d/r$, czyli że maleje do zera w granicy $d \to 0$.

Wykonamy zatem serię pomiarów pojemności C dla różnych wartości d, a następnie wykres iloczynu Cd. w funkcji odległości okładek d (rys. 2).



Rys. 2. Metoda eliminacji wpływu pola rozproszonego (patrz tekst)

Przez uzyskane punkty wykresu przeprowadzamy graficznie lub analitycznie gładką krzywą i ekstrapolujemy, czyli przedłużamy do wartości $d = 0$. Współrzędną punktu przecięcia krzywej $Cd = f(d)$ z osią pionową nazywamy *ekstrapolowaną* wartością iloczynu $(Cd)_{\text{extr}}$. Wartość $(Cd)_{\text{extr}}$ podstawiamy do licznika wzoru (4) by uzyskać poprawną wartość ε_0. Ponadto powierzchnię okładki kondensatora S i przekładki S_p obliczamy na podstawie zmierzonych średnic D i D_p jako $S = \frac{\pi D^2}{4}$ i $S_p = \frac{\pi D_p^2}{4}$. W ten sposób otrzymujemy wzór końcowy

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\pi} \frac{(Cd)_{\text{extr}}}{D^2 + 3(\varepsilon_r - 1) D_p^2} . \tag{5}$$

Trzecim potencjalnym źródłem błędu systematycznego przy wyznaczaniu stałej elektrycznej jest fakt, że zamiast kondensatora próżniowego mamy kondensator wypełniony powietrzem (ε_r = 1,0054). Ocenie studenta pozostawiamy, czy odpowiednią poprawkę warto uwzględniać, biorąc pod uwagę wielkość innych niepewności pomiaru.

Pomiar przenikalności względnej dielektryków

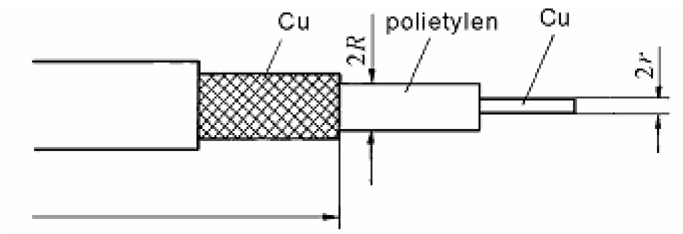
Wartość ε_r dielektryków stałych (tab. 1) wyznaczyć można przez pomiar pojemności kondensatora płaskiego z okładkami oddzielonymi cienką płytą z badanego materiału. Korzystamy ze wzoru (2), poprawki na pole rozproszone nie będziemy uwzględniać.

Obok kondensatora płaskiego przykładem obiektu o określonej pojemności jest kabel koncentryczny (rys. 3). Można go traktować jako kondensator cylindryczny, którego jedną okładką jest środkowy drut, drugą – miedziany oplot.

Pojemność kondensatora cylindrycznego wyraża wzór

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r l}{\ln \frac{R}{r}} , \tag{6}$$

w którym R i r oznaczają promienie okładek kondensatora, l jest jego długością.



Rys. 3. Kabel koncentryczny jako kondensator cylindryczny

Pojemność kabla koncentrycznego, zwykle wyrażana w pF/m, jest parametrem, który może mieć znaczenie dla działania współpracujących układów elektronicznych. Jej pomiar umożliwia wyznaczenie ε_r dla stosowanego w nim dielektryka, którym zwykle jest polietylen (tab. 1).

Tab. 1. Przenikalność elektryczna dla wybranych dielektryków w warunkach normalnych. Wartości wg. tablic [2].

MATERIAŁ	ε_r
powietrze	1,000594
polietylen	2,3
polichlorek winylu (PCV)	2,8
pleksiglas	2,6
szkło	6 ÷ 8
chlorek sodu	11,2
krzem	11,7
ciekły azot (70 K)	1,45
etanol	24,6
woda	80,2

Wyznaczenie ε_0 jako pośredni pomiar prędkości światła

W równaniach elektrostatyki (prawo Gaussa) pojawia się stała ε_0 natomiast w równaniach magnetostatyki (prawo Ampera) stała μ_0. Można odnieść wrażenie, że scharakteryzowanie własności elektromagnetycznych próżni wymaga dwu stałych. Tak jednak nie jest, gdyż wartość jednej z nich, konkretnie μ_0 w układzie SI, jest wynikiem konwencji definiującej jednostkę natężenia prądu elektrycznego.

Przypomnijmy sobie, że amper jest zdefiniowany jako wartość prądu, który płynąc przez dwa nieskończone równoległe przewody odległe o $a = 1$ m wytwarza siłę $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N na odcinku $l = 1$ m długości przewodu. Siła oddziaływania między przewodami dana jest wzorem

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}\,. \tag{7}$$

Podstawiając do tego wzoru wymienione w definicji ampera wartości *F, l,* i *a* oraz $I = 1$ A otrzymujemy zarówno wartość liczbową jak i jednostkę stałej magnetycznej,

$$\mu_0 = \frac{2\pi a F}{I^2 l} = \frac{2\pi \cdot 1[\mathrm{m}] \cdot 2 \cdot 10^{-7}[\mathrm{N}]}{1^2\,[\mathrm{A}^2] \cdot 1[\mathrm{m}]} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

Pełny układ równań elektromagnetyzmu (równania Maxwella) umożliwia obliczenie prędkości fali elektromagnetycznej w próżni jako

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\,. \tag{8}$$

Pomiar stałej elektrycznej ε_0 stanowi więc pośrednią metodę wyznaczenia prędkości światła.

Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki* cz. 3, PWN 2005.
2. W. Mizerski, W. Nowaczek, *Tablice fizyczno-astronomiczne*, Wydawnictwo Adamantan 1995.