

## Wybrane zagadnienia teoretyczne do egzaminu z Metod Ilościowych w Naukach Technicznych I

–

### I. Elementy teorii mnogości i liczb

1. Podaj cantorowskie określenie zbioru.
2. Podaj definicje podstawowych działań na zbiorach oraz zilustruj je graficznie za pomocą diagramów Venna.
3. Podaj kryterium pozwalające określić diagram Venna?
4. Aksjomatyka Peana i zasada indukcji matematycznej.

### II. Liczby zespolone

1. Podaj definicję liczby zespolonej i określ działania dodawania (odejmowania), mnożenia (dzielenia) w tym zbiorze liczbowym.
2. Podaj definicję sprzężenia zespolonego, modułu, argumentu liczby zespolonej oraz wymień ich własności.
3. Podaj postać algebraiczną, trygonometryczną i wykładniczą liczb zespolonych oraz podaj związki między nimi.
4. Podaj interpretację geometryczną liczb zespolonych (płaszczyzna Gaussa, diagram Arganda).
5. Podaj definicję naturalnej potęgi o wykładniku naturalnym i pierwiastka z liczby zespolonej wraz z interpretacją geometryczną, wzór de Moivre'a, sformułuj zasadnicze twierdzenie algebry.

### III. Wektory w przestrzeniach niskowymiarowych

1. Podaj definicję wektora wraz z towarzyszącymi mu pojęciami pomocniczymi.
2. Wymień podstawowe działania na wektorach i omów ich własności oraz podaj interpretację geometryczną.
3. Podaj definicję układu kartezjańskiego wraz z towarzyszącymi mu pojęciami pomocniczymi.
4. Podaj twierdzenie o jednoznaczności rozkładu wektora względem bazy,
5. Podaj definicję iloczynu skalarnego i omów jego własności.
6. Pojęcia ortogonalności, ortonormalności wektorów, cosinusy kierunkowe, pojęcie rzutu ortogonalnego.
7. Omów procedurę ortogonalizacyjną Grama-Schmidta.
8. Podaj definicję iloczynu wektorowego wraz z towarzyszącymi mu pojęciami pomocniczymi

9. Podaj charakterystykę iloczynu wektorowego, jego własności, interpretację geometryczną oraz omów pojęcie momentu wektora.
10. Podaj definicję iloczynu mieszanego wraz z towarzyszącymi mu pojęciami pomocniczymi.
11. Podaj charakterystykę iloczynu mieszanego, jego własności, interpretację geometryczną.

#### IV. Macierze i algebra macierzowa

1. Podaj definicję macierzy i określ podstawowe działania na nich (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę, iloczyny: Cayleya, Liego, Jordana i związek między nimi).
2. Podaj definicję macierzy: symetrycznej, antysymetrycznej, hermitowskiej, antyhermitowskiej, idempotentnej, nilpotentnej.
3. Sformułuj twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności macierzy odwrotnej.
4. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o przemienności operacji odwracania i transponowania macierzy.
5. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o odwracalności iloczynu macierzy.
6. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o rozkładzie macierzy na sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.
7. Omów algorytmy odwracania macierzy.

#### V. Wyznacznik i ślad macierzy

1. Podaj definicję wyznacznika  $n$ -tego stopnia i wymień jego podstawowe własności.
2. Wymień sposoby obliczania wyznaczników niskich stopni (do 3-go włącznie) oraz pokaż jak obliczać wyznaczniki stopnia  $n > 3$  (rozwiniecie Laplace'a).

#### VI. Układy równań liniowych

1. Podaj definicję układów równań liniowych
2. Podaj definicję układu Cramera oraz sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capellego wraz z wnioskami z niego wynikającymi.

#### VII. Przestrzenie liniowe

1. Podaj definicję przestrzeni liniowej.
2. Podaj definicję kombinacji liniowej wektorów. Kiedy wektory nazywamy liniowo zależnymi, a kiedy liniowo niezależnymi?
3. Podaj definicję bazy w skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej.
4. Sformułuj i udowodnij twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia wektora względem wybranej bazy.

### VIII. Przekształcenia liniowe

1. Podaj definicję przekształcenia liniowego i omów podstawowe działania na tych przekształceniach.
2. Omów konstrukcję macierzy przekształcenia liniowego.
3. Podaj definicję jądra i obrazu przekształcenia liniowego.
4. Omów procedurę znajdowania wartości własnych i wektorów własnych.
5. Podaj definicję transformacji podobieństwa.

### IX. Formy

1. Podaj definicję formy dwuliniowej, kwadratowej, symetrycznej, dodatnio określonej, ujemnie określonej.
2. Podaj interpretację geometryczną dla form kwadratowych (płaszczyzna).
3. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a sprowadzaniu formy kwadratowej do postaci diagonalnej.

*Bartłomiej Spisak*