25. 04. 2019

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 1

1.1. Proszę wyprowadzić wzory potrzebne do procedury Grama-Schmidta, a następnie przeprowadzić ortogonalizację dla wielomianów $p_i(x)$ następująco określonych: $p_0(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2, p_4(x) = x^3$ na przedziale $x \in [-1, 1]$ z iloczynem skalarnym w postaci

$$\langle p_i | p_j \rangle = \int_{-1}^{1} dx \; p_i(x) p_j(x).$$

1.2. Proszę wykazać, że ciągi funkcyjne:

a) $d_n(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin nx}{x} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-n}^{n} dk \; \exp[ikx],$

b) $d_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\big[-n^2 x^2\big],$

c) $d_n(x) = \dfrac{n}{\pi} \dfrac{1}{1 + n^2 x^2},$

można użyć do określenia dystrybucji δ–Diraca wg wzoru:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi(x) d_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi(x) \delta(x) = \varphi(0).$$

Podpunkt a) obowiązkowy, a z pozostałych podpunktów jeden do wyboru.

1.3. Proszę wykazać następujące własności δ–Diraca:

a) $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x),$

b) $x\delta(x) = 0,$

c) $\delta\big(f(x)\big) = \sum_n \dfrac{1}{\big|f'(x_n)\big|} \delta(x - x_n)$,gdzie x_n jest jednokrotnym miejscem zerowym funkcji $f(x)$, przy czym $f'(x_n) \neq 0$,

d) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0).$

Następnie proszę zastosować powyższe własności do obliczenia całek typu

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi(x) \delta(-ax + b),$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; x\delta(x^2 - 4),$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; x^2 \delta(\cos x).$

1.4. Korzystając z faktu, że pierwsza i n-ta pochodna dystrybucji T wyrażają się odpowiednio wzorami

a) $\langle T'|\varphi\rangle = -\langle T|\varphi'\rangle$,

b) $\langle T^{(n)}|\varphi\rangle = (-1)^n \langle T|\varphi^{(n)}\rangle$,

proszę pokazać, że

a) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$,

b) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Bartłomiej Spisak