16. 05. 2019

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 3

3.1. Cząstka o masie m porusza się pod wpływem siły $F = F_0\theta(t)$ zgodnie z równaniem Newtona w ośrodku schrakteryzowanym przez siłę tarcia, która jest proporcjonalna do prędkości. Zakładając jednopunktowe warunki brzegowe w postaci: $x(0) = 0$ i $x'(0) = 0$, proszę wyznaczyć trajektorię cząstki w przestrzeni fazowej (położenie – pęd), rozwiązując równania Newtona techniką transformat Laplace'a.

3.2. Proszę obliczyć transformatę Fouriera z funkcji

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2 + \lambda^2},$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i $\lambda^2 > 0$.

3.3. W pewnych przypadkach proces rozpraszania cząstek można opisać za pomocą potencjału sferycznie-symetrycznego w postaci

$$U(r) = U_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

Proszę wyznaczyć częstość rozpraszania cząstek ze stanu $|\mathbf{k}\rangle$ do stanu $\langle\mathbf{k}'|$ wiedząc, że

$$W(\mathbf{k}) \propto \sum_{\mathbf{k}'} \left|\langle\mathbf{k}'|\, U\, |\mathbf{k}\rangle\right|^2 \delta(E_k' - E_k),$$

przyjmując, że fala padająca i rozproszana jest reprezentowana przez fale płaskie, a relacja dyspersji jest kwadratowa, tzn. $E_p = p^2/(2m)$.

3.4. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla $(1+1)$-wymiarowego równania dyfuzji

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$$

Wskazówka: W dowolnej chwili t gęstość cząstek $n(x,t)$ można wyrazić przez

$$n(k,t) = \int dx\, n(x,t) e^{-ikx}.$$

3.5. Proszę przeprowadzić analizę Fouriera dla równania Gaussa,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

opisującego pole elektromagnetyczne w próżni.
Wskazówka: W dowolnej chwili t natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ można wyrazić przez

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\, \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Bartłomiej Spisak