

Matematyczne metody fizyki 3

Zestaw 5

5.1. Na powierzchni powłoki kulistej o promieniu a utrzymywany jest potencjał $V_0(\vartheta)$. Proszę znaleźć potencjał

- a) wewnątrz powłoki kulistej,
- b) na zewnątrz powłoki kulistej.

5.2. Nieskończony walec kołowy o promieniu a jest naładowany elektrycznie w ten sposób, że rozkład potencjału na jego powierzchni zależy od kąta φ , tzn.

$$V(a, \varphi) = f(\varphi),$$

gdzie $f(\varphi)$ jest daną funkcją.

Proszę znaleźć potencjał $V(r, \varphi)$ pola elektrostatycznego:

- a) wewnątrz walca,
- b) na zewnątrz walca.

5.3. Proszę znaleźć rozkład temperatury w kuli o promieniu R , jeżeli wiadomo, że $T(\mathbf{r})$ spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}) = 0.$$

Temperatura na powierzchni kuli wynosi

$$T(R, \vartheta, \varphi) = T_0 \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi,$$

gdzie r, ϑ, φ są współrzędnymi sferycznymi.

5.4. Membrana (krążek z gumy o promieniu a) wykonuje drgania; brzeg ($r = a$) pozostaje unieruchomiony. Proszę znaleźć częstości własne drgań.

Jak zmieni się sytuacja jeżeli w środku membrany wycięty jest kołowy otwór o promieniu a_0 ?

Wskazówka:

Ogólne rozwiązanie równania Bessela to kombinacja liniowa funkcji: $J_m(kx)$ i $Y_m(kx)$. Funkcja $Y_m(kx)$ zachowuje się podobnie jak $J_m(kx)$ dla dużych wartości argumentu, natomiast w zerze $\lim_{kx \rightarrow 0} Y_m(kx) = \infty$.