

# Mechanika kwantowa

## Zestaw 1

1.1. Niech *kety*  $|u_1\rangle$ ,  $|u_2\rangle$  oraz  $|u_3\rangle$  stanowią bazę ortonormalną w trójwymiarowej przestrzeni liniowej  $\mathcal{V}(\mathbb{C})$ . Proszę obliczyć

- a)  $|\phi\rangle + |\psi\rangle$ ,
- b)  $2i|\phi\rangle - |\psi\rangle$ ,

gdy *abstrakcyjne wektory stanu*  $|\phi\rangle$  oraz  $|\psi\rangle$  mają postać

$$|\psi\rangle = 2i|u_1\rangle - |u_2\rangle + 4|u_3\rangle, \quad |\phi\rangle = |u_1\rangle + 3i|u_2\rangle - |u_3\rangle.$$

Czy iloczyny *ketów* typu  $|\psi\rangle|\phi\rangle$  mają sens?

1.2. Dane są trzy *abstrakcyjne wektory stanu*  $|v_i\rangle$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , określone w trójwymiarowej przestrzeni liniowej  $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ . W reprezentacji macierzowej ich postać to

$$|v_1\rangle = [2 \ 3 \ -1]^T, \quad |v_2\rangle = [0 \ 1 \ 2]^T, \quad |v_3\rangle = [0 \ 0 \ -5]^T.$$

Proszę wykazać, że mogą one tworzyć bazę w tej przestrzeni. Następnie proszę znaleźć współrzędne *keta*  $|w\rangle = [1 \ 1 \ -1]^T$  względem tej bazy.

Uwaga: Symbol  $[ \ ]^T$  oznacza transpozycję macierzy wierszowej.

1.3 Dla *abstrakcyjnych wektorów stanu* typu *ket*  $|\phi\rangle$  oraz  $|\psi\rangle$  określonych w zadaniu 1.1. proszę

- a) wyznaczyć  $|\psi\rangle^*$  oraz  $|\phi\rangle^\dagger$ . Czy *abstrakcyjne wektory stanu*  $|\psi\rangle$  oraz  $|\phi\rangle^\dagger$  należą do tej samej przestrzeni?
- b) zastanowić się czy dodawanie  $|\psi\rangle + \langle\phi|$  ma sens?
- c) obliczyć iloczyny skalarne  $\langle\phi|\phi\rangle$ ,  $\langle\psi|\psi\rangle$  oraz sprawdzić, czy  $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$ ,
- d) unormować *kety*  $|\phi\rangle$  oraz  $|\psi\rangle$ ,
- e) wykazać, że dla *ketów*  $|\phi\rangle$  oraz  $|\psi\rangle$  spełniona jest nierówność Schwarzera

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle,$$

f) wykazać, że dla *ketów*  $|\phi\rangle$  oraz  $|\psi\rangle$  spełniona jest nierówność trójkąta

$$\sqrt{\langle\psi + \phi|\psi + \phi\rangle} \leq \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} + \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle},$$

- g) znaleźć reprezentację macierzową *ketów*  $|\phi\rangle$  oraz  $|\psi\rangle$ ,
- h) obliczyć iloczyny  $|\phi\rangle\langle\psi|$  oraz  $|\psi\rangle\langle\phi|$  oraz porównać ich ślady.

Uwaga: Symbol  $[ \ ]^*$  oznacza sprzężenie zespolone, natomiast symbol  $[ \ ]^\dagger$  oznacza sprzężenie hermitowskie rozumiane jako złożenie transpozycji i sprzężenia zespolonego.

- 1.4** Stosując notację Diraca proszę zapisać ogólne wyrażenie na rzut *keta*  $|v_i\rangle$  na *keta*  $|v_j\rangle$ . Następnie proszę znaleźć rzut *keta*  $|v_1\rangle$  na *kety*  $|v_2\rangle$  oraz  $|v_3\rangle$  dla danych z zadania **1.2**.
- 1.5** Proszę sprawdzić, czy *kety* z zadania **1.2**. są ortogonalne? Jeżeli nie, to proszę je zortogonalizować stosując procedurę Grama-Schmidta.

**B. Spisak**