21. 03. 2019

Mechanika kwantowa

Zestaw 3

3.1 Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Przyjmując, że dowolny element macierzowy operatora $\hat{\mathbf{A}}$ w tej bazie ma postać $A_{ij} = \langle\phi_i| \hat{\mathbf{A}} |\phi_j\rangle$ proszę wykazać, że operator $\hat{\mathbf{A}}$ może być zapisany w postaci

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} |\phi_i\rangle \langle\phi_j| .$$

3.2. Niech $|\phi\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{\mathbf{A}}$ i niech $\hat{\mathbf{B}}$ jest dowolnym operatorem. Proszę obliczyć wartość oczekiwaną komutatora $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}\right]$ w stanie $|\phi\rangle$.

3.3. Proszę wykazać, że wartości własne operatora unitarnego są zespolone i leżą na jednostkowym okręgu.

3.4. Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_2(\mathbb{C})$. Operator $\hat{\mathbf{H}}$ w tej bazie ma postać

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \epsilon & v \\ v & \epsilon \end{bmatrix},$$

gdzie $v \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Proszę znaleźć reprezentację macierzową operatora $\hat{\mathbf{H}}$ w bazie utworzonej ze stanów $|\phi_i'\rangle$, dla $i = 1, 2$ wygenerowanej przekształceniem liniowym takim, że

$$|\phi_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle), \quad |\phi_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle).$$

3.5. Niech stany $|\phi_i\rangle$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Operator rzutowy $\hat{\mathbf{P}}_i$ jest określony wzorem

$$\hat{\mathbf{P}}_i := |\phi_i\rangle \langle\phi_i| .$$

Proszę wyznaczyć wartości własne tego operatora oraz wykazać jego następujące własności

a) $\hat{\mathbf{P}}_i^\dagger = \hat{\mathbf{P}}_i$,

b) $\hat{\mathbf{P}}_i^2 = \hat{\mathbf{P}}_i$,

c) $\hat{\mathbf{P}}_i\hat{\mathbf{P}}_j = \hat{\mathbf{P}}_j\hat{\mathbf{P}}_i$,

d) $\left\langle \psi \middle| \hat{\mathbf{P}}_i\psi \right\rangle = \left\| \hat{\mathbf{P}}_i\psi \right\|^2$.

3.6. Proszę sprawdzić, czy operator $\hat{\mathbf{Q}}$ określony wzorem

$$\hat{\mathbf{Q}} := \hat{\mathbb{1}} - \hat{\mathbf{P}}$$

jest operatorem rzutowym, gdy $\hat{\mathbf{P}}$ jest operatorem rzutowym.

3.7. Proszę wykazać, że operator rzutowy $\hat{\mathbf{P}}$ może być użyty do rozdzielenia stanu $|\chi\rangle$ na sumę dwóch ortogonalnych wyrazów.

3.8. Operatory $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$ są określone wzorami

$$\hat{\mathbf{A}} = |\phi\rangle\langle\phi|\,, \quad \hat{\mathbf{B}} = |\psi\rangle\langle\psi|\,,$$

przy czym $\big\langle\phi\big|\psi\big\rangle = z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Dla jakich warości z operator $\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ może być uważany za operator rzutowy?

B. Spisak