23. 03. 2019

Mechanika kwantowa

Zestaw 4

4.1. Proszę wykazać, że

$$f\left(\hat{\mathbf{A}}\right)|\phi\rangle = f(a)\,|\phi\rangle\,,$$

gdy spełnione jest równanie własne operatora $\hat{\mathbf{A}}$

$$\hat{\mathbf{A}}\,|\phi\rangle = a\,|\phi\rangle\,.$$

4.2 Niech zbiory *ketów*: $\{|\phi_1\rangle\,, |\phi_2\rangle\,, \ldots, |\phi_n\rangle\}$ oraz $\{|\phi'_1\rangle\,, |\phi'_2\rangle\,, \ldots, |\phi'_n\rangle\}$ stanowią dwie bazy ortonormalne w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ powiązane transformacją unitarną

$$|\phi'_k\rangle = \hat{\mathbf{U}}\,|\phi_k\rangle\,,$$

gdzie $\hat{\mathbf{U}}$ jest macierzą unitarną. Proszę wykazać słuszność tego wyrażenia, przyjmując że współczynniki rozwinięcia dla dowolnego stanu $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ określone względem bazy *primowanej* mają postać $\left\langle\psi\middle|\phi'_l\right\rangle$.

4.3. Proszę obliczyć następujące komutatory:

a) $[\hat{x}^2, \hat{p_x}]$,

b) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}]$,

c) $[f(\hat{x}), \hat{p_x}^2]$.

Wskazówka:
Operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p_x}$ spełniają relacje komutacji w postaci:

a) $[\hat{x}, \hat{p_x}] = i\hbar$,

b) $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$,

c) $[\hat{p_x}, \hat{p_x}] = 0$.

4.4. Proszę wykazać, że ślad z iloczynu operatorów jest niezmienniczy ze względu na cykliczną zmianę położenia tych operatorów.

4.5. Proszę pokazać, że zachodzi wzór

$$\det e^{\hat{\mathbf{A}}} = e^{\mathrm{Tr}\,\hat{\mathbf{A}}}$$

a następnie wskazać jakie warnki muszą być spełnione, aby ten wzór był prawdziwy.

4.6. Proszę wykazać słuszność formuły Bakera–Campbella–Hausdorffa.

B. Spisak