09. 01. 2019

Mechanika kwantowa

Zestaw 7

7.1. Dane są trzy funkcje:

$$\phi_1(x) = x^2 e^{-x/2},\ \phi_2(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{6}x\right)e^{-x/2},$$

oraz

$$\phi_3(x) = x\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}x^2\right)e^{-x/3}.$$

Proszę:

a) sprawdzić, czy podane funkcje są całkowalne z kwadratem,

b) znaleźć czynniki normalizacyjne odpowiadające podanym funkcjom,

c) zbadać, które z podanych funkcji są do siebie ortogonalne.

We wszystkich przypadkach przyjąć przedział całkowania $[0, \infty)$.
Czy funkcje typu

$$\phi_n(x) = W_n(x)e^{-x/n},$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n, mogą być uważane za funkcje falowe stanów związanych?

7.2. Proszę policzyć kwadraty operatorów zapisanych w reprezentacji położeniowej:

a) $\hat{A} = \dfrac{d}{dx} + x$,

b) $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$,

c) $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

7.3. Proszę sprawdzić hermitowskość operatorów:

a) operator $\hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$,

b) operator $\hat{d}_x = \dfrac{d}{dx}$.

Jakie warunki muszą spełniać funkcje na które działają w/w operatory?

7.4. Proszę policzyć wartości oczekiwane operatorów:

a) $\hat{B} = \hat{x}$,

b) $\hat{C} = \dfrac{d}{dx}$,

c) $\hat{D} = \dfrac{d^2}{dx^2}$,

d) $\hat{A} = \dfrac{d}{dx} + x$,

w stanie reprezentowanym przez funkcję $\phi(x) = A \exp[-\alpha x^2]$, gdzie A jest stałą normalizacyjną, natomiast $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją własną któregoś z tych operatorów?

7.5. Proszę obliczyć $[\hat{A}_u, \hat{A}_v]$ dla operatorów:

$$\hat{A}_u = \frac{d}{dx} + u(x), \qquad \hat{A}_v = \frac{d}{dx} + v(x).$$

7.6. Proszę znaleźć operator różniczkowy $\hat{T}_a$ przeprowadzający funkcję $\psi(x)$ w funkcję $\psi(x+a)$, czyli

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a).$$

UWAGI OGÓLNE:

Przydatne całki:

1. $$\int dx\ x^n \sin ax = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int dx\ x^{n-1}\cos ax,$$

2. $$\int_0^\infty dx\ x^n e^{-ax} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, & (n > -1, \quad a > 0), \\ \dfrac{n!}{a^{n+1}}, & (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad a > 0), \end{cases}$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$,

4. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}(\frac{\pi}{\alpha})^{1/2}$.

Wybrane własności funkcji gamma:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,

2. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

3. $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}$.