11. 06. 2019

Mechanika kwantowa

Zestaw 9

9.1. Stan układu kwantowego w reprezentacji liczb obsadzeń można zapisać w postaci:

$$|n\rangle = C_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle,$$

gdzie $|0\rangle$ jest stanem podstawowym rozpatrywanego układu.
Korzystając z definicji stanu, proszę:

a) unormować stany $|n\rangle$ oraz sprawdzić ich ortogonalność,

b) pokazać, że

- $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,
- $\hat{a}^|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$,

9.2. W zagadnieniu 1-D oscylatora harmonicznego operatory $\hat{a}$ oraz $\hat{a}^\dagger$ można wyrazić za pomocą operatorów położenia $\hat{x}$ i pędu $\hat{p}_x$ zapisanych w reprezentacji położeniowej w następujący sposób

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right),$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}_x\right).$$

Proszę obliczyć wartość oczekiwaną operatora $\hat{x}^3$ w stanie n.

9.3. Proszę znaleźć w drugim rzędzie rachunku zaburzeń poprawkę do energii stanu podstawowego oscylatora harmonicznego umieszczonego w stałym jednorodnym polu elektrycznym $\mathcal{E}$.

Uwaga

a) algebra operatorów $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{1}}, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = \hat{0}, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = \hat{0}.$$

b) przydatna tożsamość

$$[\hat{a}, (\hat{a^\dagger})^m] = m(\hat{a}^\dagger)^{m-1},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}_+$.

B. Spisak