• model Bohra atomu wodoru, • postulaty mechaniki kwantowej, • interpretacja fizyczna funkcji falowej, • normowanie funkcji falowej, • cząstka w nieskończenie głębokiej jamie potencjału, • efekt tunelowy

1. (Nadobowiązkowe.) Wysokoenergetyczne neutrony przechodzące przez ośrodek materialny oddziaływują głównie poprzez zderzenia sprężyste z atomami ośrodka, w wyniku czego tracą energię i spowolniają się. Jeśli ośrodek jest w temperaturze pokojowej, to po krótkim czasie zostaje osiagnięta równowaga termodynamiczna i widmo energetyczne neutronów określone jest rozkładem Maxwella. Znajdź długość fali de Broglie'a dla średniej energii neutronu i oceń, czy wiązka takich neutronów nadaje się do badań krystalograficznych.

2. Opierając się na teorii Bohra wyprowadzić dla atomu wodoru wzory na możliwe wartości promienia orbity r_n, energii atomu E_n, liczby falowej emitowanego fotonu λ_{kl} przy przeskoku elektronu ze stanu k do stanu l ($k > l$):
$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m\, e^2}\, n^2, \qquad E_n = -\frac{m\, e^4}{8\,\varepsilon_0^2\, h^2}\,\frac{1}{n^2} = \frac{-13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3...,$$
$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = R\left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{k^2}\right), \quad \text{gdzie} \quad R = \frac{m\, e^4}{8\,\varepsilon_0^2\, h^3 c} = 1.097 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1} \text{ jest stałą Rydberga.}$$
Znaleźć liczbową wartość promienia atomu wodoru dla stanu podstawowego r_1 oraz energię jonizacji atomu.

3. Przeprowadzono atom wodoru ze stanu podstawowego w stan wzbudzony, charakteryzujący się główną liczbą kwantową $n = 2$. Znaleźć energię wzbudzenia atomu. Znaleźć długość fali promieniowania przy przejściu ze stanu wzbudzonego do podstawowego, do jakiej serii widmowej należy to promieniowanie?

4. Posługując się modelem Bohra znaleźć długość fali pierwszej, drugiej i trzeciej linii w części widzialnej widma wodoru (seria Balmera).

5. Przy przejściu elektronu w atomie wodoru z jednej z możliwych orbit na drugą, bliższą jądra atomu, jego energia zmniejsza się 0 1.892 eV. Znaleźć długość fali tego promieniowania. Wykonaj szkic poziomów energetycznych i zaznacz na nim podane przejście.

6. Zastosuj do opisu ruchu Księżyca wokół Ziemi model kwantowy Bohra (załóż ruch po orbicie kołowej o promieniu R). Znajdź liczbę kwantową n odpowiadającą znanej wielkości R. Oblicz różnicę ΔR dla dwóch kolejnych możliwych stanów stacjonarnych. Czy dałoby się wykryć ją doświadczalnie?

7. Jakie warunki narzuca mechanika kwantowa na funkcję falową opisującą stan układu?

8. Pokaż, że rozwiązując pełne równanie Schrödingera zależne od czasu
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x,y,z,t)\right]\psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t)$$
dla cząstki swobodnej (fala płaska, na cząstkę nie działają siły, energia potencjalna $U = 0$) uzyskuje się rozwiązanie jak w zadaniu 9 poprzedniego zestawu.

9. Pokaż, że jeśli energia potencjalna U nie zależy od czasu to z pełnego równania Schrödingera można uzyskać:

   a) równanie niezależne od czasu, opisujące stany stacjonarne:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi(x,y,z) + U(x,y,z)\,\varphi(x,y,z) = E\varphi(x,y,z).$$

   b) oraz część zależną od czasu, daną równaniem $\dfrac{d\phi(t)}{dt} = -i\dfrac{E}{\hbar}\phi(t)$, której rozwiązaniem jest $\phi(t) = e^{-iEt/\hbar}$.

   To, że stany są stacjonarne, wynika z równości $|\psi(x,y,z,t)|^2 = |\varphi(x,y,z)|^2$.

   Wskaz.: Całkowitą f. falową przedstawiamy jako iloczyn dwóch funkcji, jednej zależnej tylko od czasu, drugiej - tylko od położenia $\psi(x,y,z,t) = \phi(t)\varphi(x,y,z)$, następnie po separacji zmiennych uzyskujemy dwa równania: jedno zależne tylko od czasu, drugie - tylko od położenia.

10. Cząstka o masie m znajduje się w jednowymiarowej prostokątnej jamie potencjału U o szerokości l i nieprzepuszczalnych ściankach ($U(x) = 0$ dla ($0 \leqslant x \leqslant l$), $U(x) = \infty$ dla $x < 0$ lub $x > 0$). Zapisz równanie Schrödingera. Jaką postać będzie miało rozwiązanie? Jakie warunki brzegowe należy założyć?
    Znaleźć: a) dopuszczalne wartości energii cząstki; b) unormowane funkcje własne; c) prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o najmniejszej energii (stan podstawowy) w obszarze $\frac{1}{3}l < x < \frac{2}{3}l$. Z czego wynika fakt skwantowania poziomów energetycznych cząstki?

11. W problemie ∞ głębokiej studni potencjału rozważ dwa przypadki:
I) założyć, że cząstką jest elektron zamknięty w obszarze liniowym $L = 2 \cdot 10^{-10}$ m. Obliczyć dla tej cząstki: a) najmniejszą możliwą energię E_1 (energię zerową) jaką może ona mieć, b) odstęp energii pomiędzy E_1, a następnym możliwym poziomem E_2, $\Delta E = E_2 - E_1$;
II) podobnie jak w punkcie poprzednim oblicz E_1 i ΔE, jeśli cząstką jest ziarenko piasku o masie 10^{-7} kg zamknięte w obszarze o szerokości 1 mm. b) Oblicz najmniejszą możliwą prędkość tej cząstki.
Jakie wnioski można wyciągnąć z obliczeń?

12. Przechodzenie cząstek przez barierę potencjału. Zakładamy, że bariera jest jednowymiarowa i ma kształt prostokątny: $U = 0$ dla $x < 0$ (obszar (1)), $U(x) = U_o$ dla $0 \leqslant x \leqslant L$ (obszar (2)), i $U(x) = 0$ dla $x > l$ (obszar (3)). Cząstka swobodna pada na barierę z obszaru (1) i ma energię kinetyczną mniejszą niż wysokość bariery ($E < U_o$).

a) Zapisz dla każdego z trzech obszarów właściwe równanie stacjonarne Schrödingera.
b) Pokaż, że rozwiązania ogólne dla każdego z obszarów są takie;

$$\varphi_1 = a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx} \text{ (superpozycja fali padającej i odbitej od bariery),}$$
$$\varphi_2 = a_2 e^{-\varkappa x} + b_2 e^{\varkappa x},$$
$$\varphi_3 = a_3 e^{ikx},$$

gdzie $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\varkappa = \sqrt{2m(U_o - E)}/\hbar$. Dlaczego dla rozwiązania φ_3 pojawia się tylko jedna stała a_3?

c) Sformułuj i zapisz 4 warunki brzegowe (ciągłość f.falowej i jej pochodnej):
(1): $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$; (2): $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$; (3): $\varphi_2(L) = \varphi_3(L)$; (4): $\varphi_2'(L) = \varphi_3'(L)$.

d) Uzasadnij, że $D = \dfrac{|a_3|^2}{|a_1|^2}$ jest współczynnikiem przeniknięcia przez barierę, a $R = \dfrac{|b_1|^2}{|a_1|^2}$ - współczynnikiem odbicia od powierzchni bariery.

Po rozwiązaniu układu czterech równań wynikających z warunków brzegowych uzyskuje się wzór na prawdopodobieństwo przejścia przez barierę (prostokątną) w wyniku efektu tunelowego:

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_o - E)}\,L}.$$

Zadania 11 i 12 są na razie nieobowiązkowe, ale proszę je przemyśleć