• Proszę zapozać się z materiałami na stronie WWW .../DYDAKTYKA "abecadło matematyczne początkującego fizyka": wektory.pdf, pochodne.pdf, układy_współrzędnych (rozdział - Wektor wodzący) analiza_wektorowa.pdf (rozdziały - Pole wektorowe i pole skalarne, różniczkowanie funkcji wektorowej)

1. Ruch prostoliniowy. Cząstka porusza wzdłuż osi x się z prędkością $v(t) = 2(1 - e^{-0.1t})$, gdzie prędkość v i czas t wyrażone są w jednostkach układu SI.

   a) Wstaw właściwe wymiary w nawiasach kwadratowych: $v[\ \ ] = 2[\ \ ](1 - e^{-0.1[\ \ ]t})$.

   b) Oblicz przyspieszenie $a(t)$ w dowolnej chwili t ruchu. Ile wynosi przyspieszenie początkowe, a ile w chwili $t = 10$ s?

   c) Jak obliczyć wpółrzędną położenia $x(t)$ w dowolnej chwili, wiedząc że położenie początkowe wynosiło $x_o = 2$ m.

2. Ruch krzywoliniowy. Tor ruchu zadany jest tak, że współrzędne (x, y) określające położenie ciała zmieniają się w czasie t następująco:
   $$\text{x(t)=A}\cos\omega t \qquad \text{y(t)=A}\sin\omega t,$$
   gdzie A, ω - stałe). Wektor, którego składowymi są x i y nazywamy wektorem wodzącym $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$.
   a) Jaką krzywą jest tor ruchu? Wykonaj szkic toru.
   b) Oblicz wektor prędkości $\vec{v}$ i przyspieszenia $\vec{a}$ dla tego ruchu. Wskaz.: wiemy, że $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
   c) Oblicz wartości prędkości i przyspieszenia, $v = |\vec{v}|$ i $a = |\vec{a}|$ (czyli długości tych wektorów). Czy te wielkości zmieniają się w czasie?
   d) Jaką interpretację fizyczną mają stałe A i ω?

3. Nadobowiązkowe. Zastosować rachunek wektorowy do wykazania wzorów:
   $$\sum_{k=0}^{n-1} cos\frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} sin\frac{2k\pi}{n} = 0\ .$$
   Wskazówka: Rozpatrzyć sumę n wektorów o jednakowej długości, takich, że każdy wektor tworzy z poprzedzającym kąt $\frac{2\pi}{n}$. Ile wynosi ta suma? Rozpatrzyć następnie rzuty na dwie prostopadłe osie.

4. Wykaż, posługujac sie rachunkiem wektorowym prawo cosinusow w trójkącie o bokach a, b, c:
   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos(\vec{a}, \vec{b}).$$
   (wskaz.: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, podnieś do kwadratu).

5. Dane sa dwa wektory: $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k},\ \hat{b} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}$. Obliczyć: a) długość każdego wektora, b) iloczyn skalarny, c) kąt pomiędzy wektorami, d) sumę i różnicę, e) iloczyn wektorowy, f) rzut wektora $\vec{a}$ na kierunek $\vec{b}$ i odwrotnie - rzut $\vec{b}$ na $\vec{a}$.

6. Krawędzie równoległościanu wyznaczone sa przez wektory $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 4\hat{\jmath}$, $\vec{c} = \hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Znaleźć powierzchnię oraz objętość równoległościanu, posługując się własnościami iloczynow wektorów.

7. Ciało wyrzucono pod katem $\alpha = 45^o$ do poziomu, z prędkością początkową $v = 20\ \frac{m}{s}$. Po jakim czasie wektor prędkości ciała utworzy z poziomem kąt $\beta = 30^o$?

8. Nadobowiązkowe. Sztywna obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Płaszczyzna koła jest pionowa, a jego oś przesuwa się poziomo z prędkością v (stałą) względem powierzchni. Rozpatrzmy punkt A, który w chwili początkowej miał współrzędne (0, 2R). Pokazać, że wektor wodzacy dla punktu A, (czyli tor ruchu), zmienia się nastepująco w funkcji czasu:
   $$\vec{r}(t) = (vt + R\ sin\frac{vt}{R})\hat{\imath} + (R + R\ cos\frac{vt}{r})\hat{\jmath}.$$
   Narysować ten tor. Obliczyć wektory prędkości i przyspieszenia punktu A (poprzez różniczkowanie) i przedyskutować jakie wartości one mają w funkcji czasu. (wskaz.: ruch jest złożeniem ruchu obrotowego i postępowego). Jaki tor będzie, jeśli przyjać, że koło toczy sie z poślizgiem?

   Załóżmy, że $R = 0.5$ m i że w chwili gdy punkt A dotyka płaszczyzny, po której toczy się obręcz, zapala się światełko. Dzieje się to z częstotliwością 1.5 s^{-1}. Oblicz z jaką prędkością ruchu postępowego toczy się obręcz.