• Zasady dynamiki cd. układy inercjalne i nieinercjalne; • Praca w polu sił; • Moc; • Energia kinetyczna, energia potencjalna; • Zasada zachowania energii;

Zad. 9,10; poprzedni zestaw

ad 9

Równanie ruchu (z II zas. dynamiki): $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$. Należy go rozwiązać, czyli znaleźć v.

Szukaną niewiadomą w tym równaniu jest funkcja $v(t)$, która występuje w dwóch miejscach: pod znakiem pochodnej i w liniowym wyrażeniu po prawej stronie. To kłopot, bo żadne przekształcenia algebraiczne nie pozwolą na znalezienie v, konieczne jest zastosowanie operacji odwrotnej do różniczkowania, czyli całkowanie, wtedy uda się wyłuskać v spod znaku pochodnej.

Jednak zastosowanie obustronnego całkowania po czasie t równania na tym etapie jest przedwczesne i nie da pozytywnego rezultatu, popatrz:

$$m\int_0^t \frac{dv}{dt}dt = mg\int_0^t dt - k\int_0^t v(t)dt.$$

Całki $\int_0^t v(t)dt$ nie da się policzyć, bo przecież funkcja $v(t)$ nie jast znana.

W takim przypadku należy wcześniej dokonać **separacji zmiennych**, tzn. doprowadzić do tego aby lewa strona równania zależała tylko od jednej zmiennej (np. od v), a nie byłoby tam zmiennej t, a prawa strona zawierała drugą zmienną, czyli t, a nie zawierała v. Mnożymy obustronnie równanie wyjściowe przez dt, a następnie dzielimy przez $(mg - kv)$.

Rezultat: $\dfrac{mdv}{mg-kv} = dt$. Teraz już można obustronnie całkować (lewa strona - zmienna całkowania v, prawa - t).

$L: \int_0^v \frac{dv}{g-\frac{k}{m}v} = ... = -\frac{m}{k}\ln(g - \frac{k}{m}v)|_0^v = -\frac{m}{k}\ln\frac{g-\frac{k}{m}v}{g}, \qquad P: \int_0^t dt = t|_0^t = t.$

Zwróć uwagę na granice całkowania: dowolnej chwili t odpowiada wartość prędkości $v(t)$, a chwili $t = 0$ wartość $v_o = 0$, co wynika z założenia że ruch jest bez prędkości początkowej.

Po całkowaniu równanie ma postać: $-\frac{m}{k}\ln(1 - \frac{k}{mg}v) = t$ i nie ma już w nim pochodnej! Teraz wystarczy go przekształcić algebraicznie aby otrzymać szukany wynik:

$$... \quad \to \quad \ln(1 - \tfrac{k}{mg}v) = -\tfrac{k}{m}t \quad \to \quad 1 - \tfrac{k}{mg}v = e^{-\frac{k}{m}t} \quad \to \quad \boxed{v = v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})}.$$

Gdy $t \to \infty$ prędkość v dąży do wartości $\frac{mg}{k}$, którą to wielkość nazywamy prędkością graniczną v_{gr}.

Narysuj wykres funkcji $v(t)$!!

Przykład.

Oblicz z jaką prędkością będzie się poruszał skoczek spadochronowy o masie 80 kg w końcowej fazie ruchu blisko Ziemi po wyskoczeniu z dużej wysokości, jeśli współczynnik oporu w powietrzu wynosi $k = 16$ kg/s.

ad 10

Równanie ruchu harmonicznego (II zas.): $ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ lub $\boxed{\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)}$.

Aby zgadnąć rozwiązanie spojrzyj na to równanie następująco. Jest to pytanie matematyczne: jaka funkcja $x(t)$ dwa razy zróżniczkowana daje taką samą funkcję $x(t)$ pomnożoną przez ujemną stałą $-\omega^2$? (k/m oznaczyliśmy dla wygody ω^2).

Sprawdź, że odpowiednie funkcje to $\boxed{\sin\omega t,\ \cos\omega t,\ \text{ich kombinacje liniowe } a\sin\omega t + b\cos\omega t,\ A\sin(\omega t+\varphi),\ B\cos(\omega t+\varphi)}$ (tu a, b, A, B, φ to dowolne stałe).

Przykład.

Pokaż, że ruch wahadła matematycznego przy małych wychyleniach wahadła opisywany jest przez równanie ruchu harmonicznego. Wyprowadź wzór na okres wahań wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, gdzie L jest długością wahadła.

Zadania.

1. Na ciało o masie 50 g działają dwie siły: siła ciężkości i pozioma siła F = 0.1 N. Jakim ruchem będzie się ono poruszać? Znajdź wektor a) przyspieszenia, b) prędkości w funkcji czasu. Przyjmij położenie początkowe ciała (0,0) i prędkość początkową (0,0). Narysuj tor. Powtórz rysunek toru jeśli przyjąć, że wektor prędkości początkowej jest równy (2 m/s,0).
2. Siły grawitacji. Znając $g = 9.81$ m/s^2 na powierzchni Ziemi oblicz na jakiej wysokości nad powierzchnią Ziemi przyspieszenie grawitacyjne wynosi 4.9 m/s^2.
3. Średnia gęstość pewnej planety jest równa gęstości Ziemi, a jej masa dwa razy mniejsza od masy Ziemi. Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na tej planecie?
4. Ile waży masa 1 kg a) na Ziemi, b) na Księżycu? (Masa Księżyca jest 81.5 razy mniejsza od masy Ziemi a jego promień jest równy 0.27 promienia Ziemi.)
5. Winda ważąca 500 kg jedzie do góry z przyspieszeniem 1.2 $\frac{m}{s^2}$. Jakie jest naprężenie liny? Jakie jest naprężenie liny jeśli ta sama winda zjeżdża w dół a) ze stałą prędkością v, b) z przyspieszeniem 1.2 $\frac{m}{s^2}$? Jakie siły a) rzeczywiste, b) pozorne należy rozpatrywać, jeśli układ odniesienia związany jest z windą?

6. Pasażer windy wjeżdżającej w górę ze stałym przyspieszeniem 0.5 m/s^2 upuścił w pewnym momencie monetę. Objaśnij ruch spadającej monety: a) w układzie inercjalnym, z punktu widzenia obserwatora będącego na Ziemi, b) w układzie nieinercjalnym związanym z windą.

7. Motocyklista jedzie z prędkością $36\frac{km}{h}$ po okręgu. Jaki jest najmniejszy promień okręgu, po którym może jechac bez wywrotki, jeśli współczynnik tarcia $\mu = 0.4$? Pod jakim kątem musi sie odchylić?

8. 1. Sformułuj słownie i matematycznie definicję pracy w polu sił.
   2. Jak się oblicza pracę gdy: a) siła jest stała i droga przesunięcia prostoliniowa, b) w dowolnym przypadku (zmienna siła, droga dowolna) ?
   3. Przesuwamy ciało po osi x od punktu $x = 2$ m do $x = 3$ m działając siłą zmienną $F(x) = 2 + 0.5x^2$ N. Oblicz pracę wykonaną przez F. Zinterpretuj tę pracę graficznie na podstawie wykresu F w funkcji x. O ile wzrosła energia kinetyczna ciała?

9. *Praca stałej siły na drodze prostoliniowej.*
   Człowiek pcha ciężar o masie 30 kg po poziomej podłodze, siła skierowaną w dół pod kątem 45^o do poziomu, przesuwając go ze stałą (!) prędkością na odległość 10 m. Jaką prącę wykonał on, jeśli współczynnik tarcia wynosi 0.2?

10. Zadanie nadobowiązkowe, do oddania na najbliższych ćwiczeniach, na ocenę.
    Na poziomym stole spoczywa łańcuch o masie M i długości L_o . Jego część o długości L zwisa swobodnie ze stołu. Do łańcucha przyłożono poziomą siłę, która powoli wciągnęła cały łańcuch na stół. Jaka praca została wykonana jeśli współczynnik tarcia wynosi μ?