

• Pęd układu cząstek; • środek masy układu punktów materialnych oraz bryły; • układ odniesienia związany ze środkiem masy; • zasada zachowania pędu;

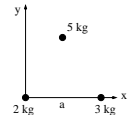
1. Energia kinetyczna poruszającej się cząstki wzrosła dwukrotnie. Jak zmienił się jej pęd?
2. Zapisz II zas. dynamiki przy użyciu pędu. Sformułuj zasadę zachowania pędu.
3. Współrzędne środka masy określa wektor  $\vec{R}$ :

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i \text{ — dla układu } n \text{ punktów materialnych;}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_M \vec{r} dm \text{ — dla bryły.}$$

Znajdź środek masy:

- (a) układu mas punktowych  $m_1, m_2, m_3$  o wartościach 2, 5, 3 kg rozłożonych w wierzchołku trójkąta równobocznego o boku 10 cm.



- (b) cienkiego pręta o długości 25 cm, którego gęstość liniowa zmienia się od zera do wartości 200 g/m, proporcjonalnie do odległości od jego końca.

- (c) cienkiej jednorodnej płytki z blachy w kształcie półkola o promieniu  $R$

(Wskaz.: najlepiej pracować w układzie biegunowym. Obierzmy układ współrzędnych  $(x, y)$  taki, aby podstawa półkola leżała na osi  $y$ , wtedy oczywiście  $y_{sm} = 0$  Stosując wzór  $x_{sm} = \frac{1}{m} \int x dm$  podziel całą powierzchnię płytki  $S$  na nieskończoną ilość małych fragmentów powierzchni  $dS$ , każda o masie  $dm = \lambda dS$ , gdzie gęstość powierzchniowa  $\lambda = m/S$ . Pokaż, że w układzie biegunowym  $dS = r dr d\varphi$ , czyli nasz wzór na współrzędną  $x$ -ową środka masy wygląda tak:

$$x_{sm} = \frac{\int x dS}{S} = \frac{1}{S} \int_0^R \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \varphi d\varphi \right) dr$$

(wstawiono  $x = r \cos \varphi$ ). Wykonaj całkowania. Dalsze wskazówki: "abc matematyki..., układy współrzędnych".

(dwa ostatnie podpunkty zrobimy wspólnie, ale proszę spróbować samodzielnie)

4. Cząstka o masie  $m_1 = 40$  g spoczywa w punkcie  $x = 0$ . Druga cząstka, o masie  $m_2 = 60$  g porusza się wzdłuż  $x$  ze stałą prędkością  $v_2 = 5$  m/s, oddalając się od pierwszej.
  - a) Oblicz jak zmienia się położenie środka masy obu cząstek w funkcji czasu  $t$  w tym nieruchomym układzie współrzędnych (nazywamy go układem laboratoryjnym).
  - b) Oblicz prędkość środka masy  $v_{sm}$  w tym układzie.
  - c) Oblicz całkowity pęd układu cząstek  $p$  w układzie laboratoryjnym.
  - d) Wprowadź nowy układ współrzędnych  $(x')$ , który porusza się wzdłuż osi  $x$  tak, że środek masy obu cząstek jest w nim nieruchomy (nazywamy go układem środka masy).
  - e) Oblicz prędkości cząstek  $v'_1, v'_2$  i ich pędy  $p'_1, p'_2$  w układzie środka masy. f) Oblicz całkowity pęd obu cząstek  $p'$  w układzie środka masy. Czy otrzymałeś(-aś) wynik: zero?
5. Dokończ zdanie:  
Układ środka masy definiuje się jako układ współrzędnych, w którym pęd całkowity jest .....
6. Zadanie nadobowiązkowe, do oddania. Piłka o masie  $m$  i promieniu  $R$  została umieszczona wewnątrz wydrążonej kuli o tej samej masie i promieniu wewnętrznym  $2R$ . Układ ten pozostaje w spoczynku na doskonale gładkiej powierzchni w takiej pozycji, że środki obu ciał znajdują się na tej samej wysokości. Uwolniona piła przetacza się po wewnętrznej stronie kuli i ostatecznie zatrzymuje się na dnie. Jak daleko przemieści się większa kula? (wskaz.: czy pęd układu podczas ruchu zmieni się? Czy położenie środka masy zmieni się?)
7. Pocisk wyrzucono pod kątem  $\beta = 30^\circ$  do poziomu z prędkością  $v_o = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . W najwyższym punkcie lotu pocisk rozerwał się na dwie nierówne części (w stosunku 2:3), z których cięższa zaczęła spadać pionowo bez prędkości początkowej. a) Jaka będzie prędkość cząstki lżejszej tuż po rozerwaniu? b) Jak daleko spadnie lżejsza część?
8. Z działa o masie 11 t wystrzelono pocisk w kierunku poziomym. Masa pocisku wynosi 54 kg, a jego prędkość u wylotu lufy 90 m/s. Znaleźć prędkość odrzutu działa w chwili, gdy pocisk opuszcza lufę.

9. Na stopień pojazdu poruszającego się prostoliniowo z prędkością 2 m/s wskakuje człowiek o masie  $m_2 = 60$  kg. Masa pojazdu  $m_1 = 240$  kg. Znaleźć prędkość pojazdu razem z człowiekiem.

Odpowiedzi:

3a) 3.5 cm, 4.3 cm; 2b) 16,7 cm od lekkiego końca; 3c)  $\frac{4}{3\pi}R = 0.42R$ ; 4b)  $\frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$ ; 4e)  $v_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$ ,  
 $v_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v_2$ ; 7a)  $\frac{5}{2}v_o \cos \beta$ ; 8) 4.4 m/s; 9) 1.6 m/s