

• Całkowanie równania ruchu.

Przykład: ruch po prostej x , znane jest przyspieszenie $a = -2t \text{ m/s}^2$. Znaleźć $v(t), x(t)$, wiedząc że prędkość początkowa $v_o = 5 \text{ m/s}$, położenie początkowe $x_o = 2 \text{ m}$.

Ze szkolnych wiadomości nie mamy odpowiednich wzorów, gdyż jest to ruch niejednostajnie zmienny. Korzystając z tego, że przyspieszenie jest pochodną prędkości zastosujemy odwrotną operację do różniczkowania, czyli całkowanie:

$$\frac{dv}{dt} = a, \text{ całkujemy obustronnie w granicach } 0, t: \int_0^t \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t (-2t) dt \rightarrow v(t)|_0^t = -t^2|_0^t \rightarrow$$

$$\rightarrow v(t) - v(0) = -t^2 - (-0^2) = -t^2 \rightarrow v(t) = 5 - t^2 \text{ m/s.}$$

Podobnie dla położenia: $\frac{dx}{dt} = v(t) = 5 - t^2$, mnożąc obustronnie przez dt :

$$dx = (5 - t^2) dt \rightarrow \int_{x_o}^x dx = \int_0^t (5 - t^2) dt \quad (\text{zwróć uwagę, że z lewej strony wstawiliśmy granice całkowania dla zmiennej}$$

$$\text{całkowania } x) \rightarrow x(t)|_{x_o} = (5t - \frac{1}{3}t^3)|_0^t \rightarrow x(t) = 2 + 5t - \frac{1}{3}t^3 \text{ m.}$$

1. Wektor przyspieszenia ma składowe (w układzie kartezjańskim): $\vec{a} = (0, 0, -g)$ ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$). Całkując równania $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ i $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ znajdź prędkość $\vec{v}(t)$ i wektor położenia $\vec{r}(t)$ dla wartości początkowych prędkości i położenia:
 - a) $\vec{v}_o = (5, 0, 2) \text{ m/s}$, $\vec{r}_o = (0, 0, 0)$, b) $\vec{v}_o = (3, 0, 0) \text{ m/s}$, $\vec{r}_o = (0, 0, 1) \text{ m}$. Sklasyfikuj te ruchy.
2. Znajdź prędkość i położenie cząstki, która porusza się po linii prostej z przyspieszeniem $a = -Ab^2 \sin(bt)$ (A, b - stałe). Przyjmij prędkość początkową i położenie początkowe równe zero. Jaką interpretację fizyczną mają stałe A i b ?
3. Oba poniższe układy równań przedstawiają ruch po okręgu o promieniu R

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} x = R \sin \varphi \\ y = R \cos \varphi \end{cases}.$$

Droga kątowna $\varphi = \omega t$. Czym te ruchy się różnią?

4. Piłka poruszająca się poziomo z prędkością $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ stacza się ze schodów ($h = 20 \text{ cm}$, $a = 30 \text{ cm}$ - wysokość i szerokość schodka). W który stopień uderzy?
5. Dwie cząstki poruszają się wzdłuż osi x i y z prędkościami $\vec{v}_1 = 2\hat{i}$, $\vec{v}_2 = 3\hat{j} [\frac{\text{cm}}{\text{s}}]$. W chwili $t = 0$ są one w punktach o współrzędnych $x_1 = -3$, $y_1 = 0$ (pierwsza cząstka) i $x_2 = 0$, $y_2 = -3$ (druga) [cm].
 - a) znaleźć wektor położenia względnego $\vec{r}(t)$, łączący położenia cząstek w dowolnej chwili (wektor ten definiujemy: $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, gdzie \vec{r}_2 i \vec{r}_1 są wektorami wodzacyimi obu cząstek, tzn. wektorami które łączą aktualne położenie cząstki z początkiem układu współrzędnych), b) kiedy i gdzie obie cząstki będą najbliżej siebie? (wskaz.: należy znaleźć minimum funkcji $|\vec{r}(t)|$)
6. Z balonu wznoszącego się do góry z prędkością $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, na wysokości 80 m nad Ziemią upuszczono przedmiot. Po jakim czasie upadnie on na Ziemię i jaką drogę przebędzie (zaniedbać opór powietrza).
7. W chwili gdy sygnał świetlny na skrzyżowaniu staje się zielony, samochód rusza ze stałym przyspieszeniem $1.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. W tej samej chwili dogania go i wyprzedza ciężarówka, jadąca ze stałą prędkością $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po przebyciu jakiej odległości samochód dogoni ciężarówkę?
8. Piłka została rzucona w powietrze z prędkością początkową v_o , pod kątem α . Na wysokości 9 m jej obserwowana prędkość wynosi $\vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j}$ w m/s (pozioma oś x , pionowa oś y). Oblicz: a) wartość v oraz kąt jaki ta prędkość tworzy z poziomem, b) prędkość początkową v_o i kąt wyrzutu α .
9. Ciało rzucono pionowo w dół. Ruch trwał 4 s , a przy upadku prędkość ciała była 4 razy większa od prędkości początkowej. Z jakiej wysokości i z jaką prędkością rzucono ciało?

10. Układ biegunowy.

a) Pokaż, że wektory bazowe układu $\hat{u}_r, \hat{u}_\varphi$ wyrażają się poprzez \hat{i}, \hat{j} następująco:

$$\hat{u}_r = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}; \quad \hat{u}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}.$$

Wersory \hat{i}, \hat{j} nie zależą od czasu, natomiast wersory $\hat{u}_r, \hat{u}_\varphi$ - tak, gdy punkt opisany współrzędnymi r, φ zmienia położenie.

b) Posługując się powyższymi wzorami (oraz oznaczając $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) wykaż związki:

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \omega \hat{u}_\varphi, \quad \frac{d\hat{u}_\varphi}{dt} = -\omega \hat{u}_r.$$

11. Znaleźć w układzie biegunowym wektory prędkości i przyspieszenia w dowolnym ruchu krzywoliniowym na płaszczyźnie, określonym przez wektor wodzący $\vec{r}(t)$.

Wskazówka: aby znaleźć prędkość i przyspieszenie obliczaj pierwszą i drugą pochodną \vec{r} (w układzie biegunowym $\vec{r} = r\hat{u}_r$), pamiętając, że od czasu mogą zależeć: $r, \omega, \hat{u}_r, \hat{u}_\varphi$.

Odpowiedź.:

$$\vec{r} = (r, 0).$$

Prędkość, przyspieszenie:

$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}, \omega r \right),$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r, 2\omega \frac{dr}{dt} + \varepsilon r \right),$$

gdzie $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ jest prędkością kątową, a $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ - przyspieszeniem kątowym.

Zastanów się nad sensem fizycznym wyniku zadania. W szczególności uprość wzory i sklasyfikuj ruch w przypadkach:

a) $r = \text{const}$, tzn. r nie zależy od czasu (ale już \vec{r} nie jest stałe),

a) $\omega = 0$,

b) $\omega \neq 0$, ale jest stałe (nie zależy od czasu).

Składowe wektora prędkości $\frac{dr}{dt}$ i ωr nazywamy odpowiednio prędkością radialną i transwersalną.

Wyrażenie $-\omega^2 r$ nazywamy przyspieszeniem dośrodkowym. To samo, ale bez minusa nazywamy przyspieszeniem odśrodkowym. Co mamy na myśli? $m\omega^2 r$ nazywamy siłą odśrodkową, $-2m\omega \frac{dr}{dt}$ nazywamy siłą Coriolisa. Siła odśrodkowa i siła Coriolisa są to siły pozorne, inaczej - bezwładności. Co to oznacza? Skąd się one biorą?

12. Zadanie nadobowiązkowe, do oddania, na ocenę.

Problem: Ruch punktu po spirali Archimedesesa.

Ma on miejsce wtedy, jeśli punkt porusza się ze stałą prędkością v_r wzdłuż pręta, a pręt unieruchomiony w jednym z końców, obraca się w danej płaszczyźnie ze stałą prędkością kątową ω . (Przykładowo: mrówka wędrująca po pręcie).

Zgodnie z powyższym opisem ruchu wektor wodzący opisujący tor ma w układzie biegunowym postać:

$$\vec{r}(t) = v_r t \hat{u}_r = \frac{v_r}{\omega} \varphi \hat{u}_r,$$

gdzie φ jest kątem obrotu pręta, a $\frac{v_r}{\omega} = A = \text{const}$. Proszę znaleźć składowe wektorów prędkości \vec{v} i przyspieszenia \vec{a} w układzie biegunowym i wzór na promień krzywizny R .

Dla wartości $v_r = 0.2$ m/s i $\omega = 1$ rad/s proszę obliczyć promień krzywizny w chwili początkowej oraz ilokrotnie on wzrośnie po 20 obrotach.

Wskazówka: wektor \vec{a} może być rozłożony na dwie składowe: styczną i prostopadłą (normalną) do toru (a_s, a_n), gdzie $a_s = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$, R - promień krzywizny, a v jest wartością prędkości.