

- Wektory. Proszę powtórzyć rachunek wektorów wg. tekstu *wektory.pdf* (patrz: „abecadło matematyczne początkującego fizyka” na stronie http://www.fis.agh.edu.pl/~wozniak/abc_math), ew. Halliday, Resnick, Walker, t.1.
- Różniczkowanie, całkowanie. Poczytaj teksty: *pochodne.pdf*, *całkowanie.pdf* w „abecadło matematyczne ...”
- Układy współrzędnych. Poczytaj o układzie kartezjańskim i układzie biegunowym - tekst: *układy_współrzędnych.pdf* w „abecadło ...”
- Wielkości kinematyczne - definicje (prędkość, przyspieszenie) w ruchu prostoliniowym i krzywoliniowym
- opis ruchu w kartezjańskim układzie współrzędnych

1. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$. Obliczyć: a) długość każdego wektora, b) iloczyn skalarny, c) kąt pomiędzy wektorami, d) sumę i różnicę, e) iloczyn wektorowy, f) rzut wektora \vec{a} na kierunek \vec{b} i odwrotnie - rzut \vec{b} na \vec{a} , e) wartość wyrażenia $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}$, dla dowolnego \vec{c} .
2. (Resnick, Halliday, Walker; t.1, rozdz.4, zad.2) Wektor położenia elektronu wynosi: $\vec{r} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ metrów. a) Wyznacz długość (wartość) wektora \vec{r} . b) Narysuj ten wektor w prawoskrętnym układzie współrzędnych. c) Podaj wymiary stałych 5,3,2 określających składowe \vec{r} .
3. (RHW1, r.4, zad.3) Wektor położenia protonu (w metrach) wynosi początkowo: $\vec{r}_1 = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$, a w chwili późniejszej $\vec{r}_2 = -2\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$. a) znajdź wektor przemieszczenia protonu. b) Pod jakim kątem jest on nachylony do płaszczyzny xy ? (odp. b: 16.1°)
Uwaga: znajdź błąd w odpowiedzi podręcznikowej.
4. Nadobowiązkowe: Zastosować rachunek wektorowy do wykazania wzorów:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0.$$

Wskazówka: dla n wektorów o jednakowej długości, leżących na płaszczyźnie – rozpatrzyć ich sumę i rzuty na prostopadłe osie. Wektory są takie, że każdy z nich tworzy z poprzedzającym kąt $\frac{2\pi}{n}$, początek wektora umieść w końcu poprzedzającego.

5. Krawędzie równoległościanu wyznaczone są przez wektory $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = 4\hat{j}$, $\vec{c} = \hat{j} + 3\hat{k}$. Znaleźć powierzchnię oraz objętość równoległościanu, posługując się własnościami iloczynów wektorów.
6. Oblicz:
 - a) średnią prędkość samochodu, który przejeżdża odcinek $x_1 = 20$ km z prędkością $v_1 = 40$ km/h, a przez następne $x_2 = 20$ km jedzie z prędkością $v_2 = 80$ km/h;
 - b) prędkość średnią oraz prędkość chwilową w 8-ej sekundzie ruchu pojazdu hamującego jednostajnie na odcinku 100 m, na którym to odcinku pojazd zmniejsza prędkość od 72 km/h do zera.
7. Ruch cząstki odbywa się wzdłuż osi x w taki sposób, że współrzędna położenia x w poszczególnych chwilach t opisana jest zależnością $x(t) = At^3$, gdzie stała A wynosi 0.01 m/s³. Stosując definicję prędkości chwilowej

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

znajdź wzór na prędkość w dowolnej chwili t i oblicz tę prędkość w chwili $t = 10$ s. (Wskaz: przyrost drogi Δx to $x(t + \Delta t) - x(t) = A(t + \Delta t)^3 - At^3$; odp: 3 m/s)

8. Cząstka ma w pewnej chwili prędkość (w m/s) $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, a w cztery sekundy później $\vec{v} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$. Wyznacz przyspieszenie średnie \vec{a}_{sr} cząstki w czasie tych 4 s, wyrażone: a) za pomocą wektorów jednostkowych, b) przez jego długość i kierunek (w tym przypadku przez kierunek rozumiemy podanie dwóch kątów: ϑ - pomiędzy wektorem \vec{a}_{sr} a osią z , φ - pomiędzy osią x a rzutem wektora \vec{a}_{sr} na płaszczyznę xy).

9. Ciało wyrzucono pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu, z prędkością początkową $v = 20 \frac{m}{s}$. Po jakim czasie wektor prędkości ciała utworzy z poziomem kąt $\beta = 30^\circ$?
(zastosuj znane wzory opisujące rzut ukośny)
10. Szttywna obręcz o promieniu R toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Płaszczyzna koła jest pionowa, a jego oś przesuwa się poziomo z prędkością v (stałą) względem powierzchni. Tor punktu A , który w chwili początkowej miał współrzędne $(0, 2R)$ przedstawia wektor wodzący:

$$\vec{r}(t) = (vt + R \sin \frac{vt}{R})\hat{i} + (R + R \cos \frac{vt}{R})\hat{j}.$$

- a) Naszkicuj ten tor w układzie (x, y) . b) Uzasadnij powyższy wzór. c) b) Znajdź wektory prędkości i przyspieszenia punktu A (poprzez różniczkowanie wektora wodzącego $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$).
11. Położenie cząstki poruszającej się wzdłuż osi x , jest opisane następującym równaniem: $x = A + Bt + Ct^3$, gdzie x i t są wyrażone w jednostkach układu SI, a wartości stałych A, B, C są równe odpowiednio: 8, 0, -2.
a) Jakie wymiary muszą mieć stałe współczynniki A, B, C w równaniu? b) Oblicz prędkość i przyspieszenie cząstki w chwili $t = 3.5$ s. c) Ile wynosi droga przebyta przez cząstkę w czasie $t = 3.5$ s (licząc od chwili $t = 0$), a ile przemieszczenie? d) Sporządź wykresy funkcji $x(t)$ i $v(t)$ i przy ich pomocy zinterpretuj wyniki uzyskane w poprzednich punktach.
12. Prędkość cząstki poruszającej się po linii prostej zmienia się następująco: $v(t) = 9 - 6t^2$ [m/s]. a) Jak wyraża się współrzędna położenia cząstki w funkcji czasu t jeśli wiadomo, że w chwili początkowej (dla $t = 0$) znajdowała się ona w odległości 3 m od początku układu współrzędnych. b) Oblicz drogę przebytą pomiędzy $t_1 = 0.5$ s i $t_2 = 1$ s. (wskaz: całkowanie).
13. Wykresy.
Zależność energii potencjalnej układu dwóch cząstek odległych od siebie o r wyraża się wzorem

$$E_p(r) = \frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^4},$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi. Przedstaw na wykresie zależność E_p w funkcji r .
(Wskaz.: Odpowiedź znajdziesz w zakładce "abecadło matematyczne...", plik *pochodne.pdf*).