• Całkowanie równania ruchu; • kinematyka ruchu jednostajnego, jednostajnie zmiennego (w tym ruch w polu grawitacyjnym blisko powierzchni Ziemi); • opis ruchu krzywoliniowego w układzie biegunowym

1. Wektor przyspieszenia ma składowe (w układzie kartezjańskim): $\vec{a} = (0, 0, -g)$ ($g = 9.81$ m/s^2). Całkując równania $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ i $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ znajdź prędkość $\vec{v}(t)$ i wektor położenia $\vec{r}(t)$ dla wartości początkowych prędkości i położenia:
a) $\vec{v}_o = (5, 0, 2)$ m/s, $\vec{r}_o = (0, 0, 0)$, b) $\vec{v}_o = (3, 0, 0)$ m/s, $\vec{r}_o = (0, 0, 1)$ m. Sklasyfikuj te ruchy. *Patrz: uzupełnienie na końcu zestawu*

2. Znajdź prędkość i położenie cząstki, która porusza się po linii prostej z przyspieszeniem $a = -Ab^2 \sin(bt)$ (A, b - stałe). Przyjąć prędkość początkową i położenie początkowe równe zero. Jaką interpretację fizyczną mają stałe A i b? *Odp:* $v(t) = -Ab(1 - \cos bt)$, $x(t) = -A(bt - \sin bt)$

3. Cząstka mając w chwili $t = 0$ prędkość v_o porusza się po linii prostej z opóźnieniem, które prędkość zmienia. Należy znaleźć prędkość w dowolnej chwili $v(t)$ zakładając, że opóźnienie jest proporcjonalne do prędkości $a = -kv(t)$ (k - dodatnia stała). W tym celu należy rozwiązać równanie $a(t) = -kv(t)$, czyli $\frac{dv}{dt} = -kv$, w którym szukana funkcja $v(t)$ występuje po obu stronach równania. Zastanów się jak scałkować to równanie aby znaleźć $v(t)$.

4. Oba poniższe układy równań przedstawiają ruch po okręgu o promieniu R
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} , \quad \begin{cases} x = R\sin\varphi \\ y = R\cos\varphi \end{cases} .$$
Droga kątowa $\varphi = \omega t$. Czym te ruchy się różnią?

5. Piłka poruszająca się poziomo z prędkością $v = 5\ \frac{m}{s}$ stacza się ze schodów (h = 20 cm, a = 30 cm - wysokość i szerokość schodka). W który stopień uderzy?

6. Dwie cząstki poruszają się wzdłuż osi x i y z prędkościami $\vec{v}_1 = 2\hat{i}$, $\vec{v}_2 = 3\hat{j}$ $[\frac{cm}{s}]$. W chwili $t = 0$ są one w punktach o współrzędnych $x_1 = -3$, $y_1 = 0$ (pierwsza cząstka) i $x_2 = 0$, $y_2 = -3$ (druga) [cm]. a) znaleźć wektor położenia względnego $\vec{r}(t)$, łączący położenia cząstek w dowolnej chwili (wektor ten definiujemy: $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, gdzie $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_1$ są wektorami wodzacymi obu cząstek, tzn. wektorami które łączą aktualne położenie cząstki z początkiem układu współrzędnych), b) kiedy i gdzie obie cząstki będą najbliżej siebie? (wskaz.: należy znaleźć minimum funkcji $|\vec{r}(t)|$)

7. Z balonu wznoszącego się do góry z prędkością 12 $\frac{m}{s}$, na wysokości 80 m nad Ziemią upuszczono przedmiot. Po jakim czasie upadnie on na Ziemię i jaką drogę przebędzie (zaniedbać opór powietrza).

8. W chwili gdy sygnał świetlny na skrzyżowaniu staje się zielony, samochód rusza ze stałym przyspieszeniem 1.8 $\frac{m}{s^2}$. W tej samej chwili dogania go i wyprzedza ciężarówka, jadąca ze stałą prędkością 9 $\frac{m}{s}$. Po przebyciu jakiej odległości samochód dogoni ciężarówkę?

9. Piłka została rzucona w powietrze z prędkością początkową v_o, pod kątem α . Na wysokości 9 m jej obserwowana prędkość wynosi $\vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j}$ w m/s (pozioma oś x, pionowa oś y). Oblicz: a) wartość v oraz kąt jaki ta prędkość tworzy z poziomem, b) prędkość początkową v_o i kąt wyrzutu α.

10. Ciało rzucono pionowo w dół. Ruch trwał 4 s, a przy upadku prędkość ciała była 4 razy większa od prędkości początkowej. Z jakiej wysokości i z jaką prędkością rzucono ciało?

11. Układ biegunowy.

    Pokaż, że wektory bazowe układu $\hat{u}_r, \hat{u}_\varphi$ wyrażają się poprzez $\hat{i}, \hat{j}$ następująco:
    $$\hat{u}_r = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}\,; \qquad \hat{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}\,,$$
    a następnie posługując się powyższymi wzorami (oraz oznaczając $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) wykaż związki:
    $$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \omega\,\hat{u}_\varphi, \qquad \frac{d\hat{u}_\varphi}{dt} = -\omega\,\hat{u}_r.$$

12. Znaleźć w układzie biegunowym wektory prędkości i przyspieszenia w dowolnym ruchu krzywoliniowym na płaszczyźnie, określonym przez wektor wodzący $\vec{r}(t)$.

    Wskazówka: aby znaleźć prędkość i przyspieszenie obliczaj pierwszą i drugą pochodną $\vec{r}$ (w układzie biegunowym $\vec{r} = r\hat{u}_r$), pamiętając, że od czasu mogą zależeć: $r, \omega, \hat{u}_r, \hat{u}_\varphi$.

    Odpowiedź.:
    $$\vec{r} = (r, 0).$$
    Prędkość, przyspieszenie:
    $$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}, \omega r\right),$$
    $$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r,\ 2\omega\frac{dr}{dt} + \varepsilon r\right),$$
    gdzie $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ jest prędkością kątową, a $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ - przyspieszeniem kątowym.

    Zastanów się nad sensem fizycznym wyniku zadania. W szczególności uprość wzory i sklasyfikuj ruch w przypadkach:
    a) $r = const$, tzn. r nie zależy od czasu (ale już $\vec{r}$ nie jest stałe),
    a) $\omega = 0$,
    b) $\omega \neq 0$, ale jest stałe (nie zależy od czasu).

    Składowe wektora prędkości $\frac{dr}{dt}$ i ωr nazywamy odpowiednio prędkością radialną i transwersalną. Wyrażenie $-\omega^2 r$ nazywamy przyspieszeniem dośrodkowym. To samo, ale bez minusa nazywamy przyspieszeniem odśrodkowym. Co mamy na myśli? $m\,\omega^2 r$ nazywamy siłą odśrodkową, $-2m\omega\frac{dr}{dt}$ nazywamy siłą Coriolisa. Siła odśrodkowa i siła Coriolisa są to siły pozorne, inaczej - bezwładności. Co to oznacza? Skąd sie one biorą?

Uzupełnienie dot. całkowania równania ruchu:

Przykład: ruch po prostej x, znane jest przyspieszenie $a = -2t$ m/s^2. Znaleźć $v(t), x(t)$, wiedząc że prędkość początkowa $v_o = 5$ m/s, położenie początkowe $x_o = 2$ m, czas t wyrażamy w sekundach.
Ze szkolnych wiadomości nie mamy odpowiednich wzorów, gdyż jest to ruch niejednostajnie zmienny. Korzystając z tego, że przyspieszenie jest pochodną prędkości zastosujemy odwrotną operację do różniczkowania, czyli całkowanie:
$\frac{dv}{dt} = a$, całkujemy obustronie w granicach 0, t: $\int_0^t \frac{dv}{dt}\,dt = \int_0^t (-2t)dt \quad\to\quad v(t)|_0^t = -t^2|_0^t \quad\to$
$\to\quad v(t) - v(0) = -t^2 - (-0^2) = -t^2 \quad\to\quad \boxed{v(t) = 5 - t^2\ [\frac{m}{s}]}$.
Podobnie dla położenia: $\frac{dx}{dt} = v(t) = 5 - t^2$, mnożąc obustronnie przez dt:
$dx = (5 - t^2)\,dt \quad\to\quad \int_{x_o}^{x} dx = \int_0^t (5 - t^2)dt$ (zwróć uwagę, że z lewej strony wstawiliśmy granice całkowania dla zmiennej całkowania x) $\quad\to\quad x(t)|_{x_o}^{x} = (5t - \frac{1}{3}t^3)|_0^t \quad\to\quad \boxed{x(t) = 2 + 5t - \frac{1}{3}t^3\ [m]}$.