• kinematyka; • dynamika, ruch punktu materialnego, układy inercjalne, zasady Newtona; • pola sił, zasada superpozycji; • równania ruchu, ich rozwiązania; • ruch w układach nieinercjalnych

1. Ruch punktu po spirali Archimedesa. Ma on miejsce wtedy, jeśli punkt porusza się ze stałą prędkością v_r wzdłuż pręta, a pręt unieruchomiony w jednym z końców, obraca się w danej płaszczyźnie ze stałą prędkością kątową ω (przykładowo: mrówka wędrująca po pręcie).
   1) Pokaż, że wektor wodzący opisujący tor ma w układzie biegunowym postać:
   $$\vec{r}(t) = v_r t\, \hat{u_r} = \frac{v_r}{\omega}\varphi\, \hat{u_r}, \qquad \text{gdzie } \varphi \text{ jest kątem obrotu pręta.}$$
   2) Znaleźć składowe wektorów prędkości $\vec{v}$ i przyspieszenia $\vec{a}$ w układzie biegunowym.
   3) Nadobowiązkowe:
   Wektor $\vec{a}$ może być rozłożony na dwie składowe: styczną i prostopadłą (normalną) do toru (a_s, a_n), gdzie $a_s = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$, R - promień krzywizny (czyli promień okręgu stycznego do toru w danym punkcie), a v jest wartością prędkości. Znaleźć wzór na promień krzywizny w zależności od kąta obrotu $R(\varphi)$. Dla wartości $v_r = 0.2$ m/s i $\omega = 1$ rad/s proszę obliczyć promień krzywizny w chwili początkowej oraz ilokrotnie on wzrośnie po 20 obrotach.

2. Cegła leży nieruchomo na desce, która jest nachylona do poziomu pod kątem 30^o. Narysuj wszystkie siły działające na cegłę.

3. Na ciało o masie 50 g działają dwie siły: siła ciężkości i pozioma siła F = 0.1 N. Jakim ruchem będzie się ono poruszać? Znajdź wektor a) przyspieszenia, b) prędkości w funkcji czasu. Przyjmij położenie początkowe ciała (0,0) i prędkość początkową (0,0). Narysuj tor.

4. Ciało o masie M wiszące na linie spuszczamy z wysokości d pionowo w dół tak, że ma stałe, skierowane do dołu przyspieszenie, równe $\frac{g}{4}$. Znaleźć naprężenie liny.

5. Na równi pochyłej o kącie nachylenia 30^o umieszczona jest masa 3 kg, która połączona jest nieważką i nierozciagliwą nitką, przełożoną przez mogący sie obracać bez tarcia krążek, ze zwisającą swobodnie drugą masą 2 kg. Obliczyć przyspieszenie obu mas (także jego kierunek) oraz naprężenie nitki jesli ruch odbywa się bez tarcia. Ruch krażka zaniedbać.

6. Ruch jednowymiarowy w polu grawitacyjnym. Masa m spada swobodnie z wysokości H bez prędkości początkowej. Napisać równanie ruchu (II zas. dyn.), w którym nieznaną funkcją jest prędkość $v(t)$, w przypadkach: a) bez uwzględnienia oporu powietrza, b) uwzględniając, że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości, $F_t = -kv$ (k jest współczynnikiem oporu). Rozwiązać równania ruchu w obu przypadkach (znaleźć funkcję $v(t)$) stosując zadane warunki początkowe. Przedstaw oba rozwiązania $v(t)$ na wykresie.
   Oba wzory różnia się, ale zakładając, że siła oporu kv jest tak mała (małe k), że można ją zaniedbać w porównaniu z siła grawitacji mg, oba wzory powinny dać praktycznie to samo. Dla wykazania tego zastosuj dwie techniki:
   1) użyj regułę de l'Hospitala do obliczenia granicy $\lim_{k\to 0} \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$,
   2) zastosuj rozwinięcie funkcji e^{-x} w szereg Taylora, które dla małych x (tzn. dla $x \ll 1$) umożliwia użycie przybliżenia $e^{-x} \approx 1 - x$.

7. Ruch masy m, który odbywa się pod wpływem siły F zmieniającej się proporcjonalnie do wychylenia x tej masy od punktu równowagi i przeciwnie skierowanej do tego wychylenia ($F = -kx$, $k-$ stały dodatni współczynnik) nazywany jest ruchem harmonicznym. Takim ruchem poruszać się może np. ciężarek zawieszony na sprężynie. Napisz równanie tego ruchu (II zas. dyn.). Zgadnij rozwiązanie $x(t)$, które spełnia to równanie (zgadywanie to też dobry sposób rozwiązywania równań różniczkowych).

8. Pokaż, że ruch wahadła matematycznego jest, dla małych wychyleń, opisany równaniem ruchu harmonicznego. Wyprowadź wzór na okres drgań wahadła $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

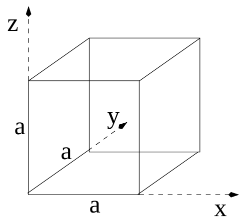
9. Średnia gęstość pewnej planety jest równa gęstości Ziemi, a jej masa dwa razy mniejsza od masy Ziemi. Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na tej planecie? (odp. 3.47 m/s^2)

10. Ile waży masa 1 kg a) na Ziemi, b) na Księżycu? Masa Księżyca jest 81.5 razy mniejsza od masy Ziemi a jego promień jest równy 0.27 promienia Ziemi. (odp. 9.81 N, 1.57 N)

11. Naładowana kula o masie $3{\cdot}10^{-4}$ kg wisi na sznurku. Na kulę działa też siła elektryczna skierowana poziomo, taka, że w stanie równowagi sznurek tworzy z pionem kąt 30^o. Znaleźć wartość tej siły oraz naprężenie sznurka. (odp. $1.7 \cdot 10^{-3}$ N, $3.4 \cdot 10^{-3}$

12. Sanki ześlizgują się z lodowej górki w kształcie równi pochyłej o wysokości h i zatrzymują się dalej na poziomym odcinku lodu w odległości s od położenia początkowego u szczytu równi, liczonej poziomo. Obliczyć współczynnik tarcia. (odp. h/s)

13. **Całkowanie**, przykład zastosowania całki do obliczania masy niejednorodnej bryły. a) Oblicz masę sześciennej kostki o boku $a = 10$ cm jeśli jest ona wykonana z niejednorodnego materiału i jej gęstość zależy od współrzędnej z (rys.) w sposób następujący: $\rho(z) = \rho_o e^{-\frac{z}{a}}$, $\rho_o = 2$ g/cm^3.
Wskazówka: podziel kostkę na plasterki o grubości dz, oblicz masę plasterka, który jest na wysokości z (wynosi ona $dm = \rho(z)a^2dx$, a następnie zsumuj (czyli wycałkuj) wszystkie takie elementarne masy dm, zmieniając z w przedziale od zera do a. (Odp. $m = \rho_o a^3(1 - 1/e)$.)

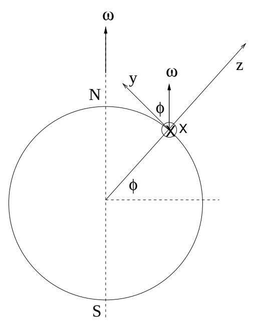


b) Oblicz masę kuli o promieniu R i gęstości zmieniającej się następująco $\rho(r) = \rho_o(1 + kr)$, gdzie r jest odległością od środka kuli. Liczbowe obliczenia wykonaj dla $R = 5$ cm, $\rho_o = 2$ g/cm^3, $k = 0.5$ 1/cm.

c) b) Oblicz masę kuli o promieniu R i gęstości zmieniającej się następująco $\rho(r, \vartheta) = \rho_o(1 + kr)\sin\vartheta$, gdzie r jest odległością od środka kuli, a ϑ - współrzędną kątową w układzie sferycznym.

14. Siły pozorne związane z rozpatrywaniem ruchu w układach nieinercjalnych, sens ich wprowadzenia. Podaj kilka przykładów.

15. Nadobowiązkowe. Spadek swobodny z uwzględnieniem siły Coriolisa. Oblicz odchylenie od pionu (wartość i zwrot) w momencie upadku na Ziemię, jeśli ciało spada (bez prędkości początkowej) z wysokości 10 km. Przyjąć szerokość geograficzną φ dla Krakowa.
Układ odniesienia spoczywający na powierzchni Ziemi nie jest, ściśle biorąc, układem inercjalnym ze względu na obrót Ziemi wokół swojej osi. Siły bezwładności, jakie należy mieć tu na uwadze to siła Coriolisa $\vec{F_c} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ i siła odśrodkowa $\vec{F_o} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$. Obie są niewielkie w porównaniu do siły ciężkości, ale ta druga jest najmniej istotna i można ją zaniedbać (zależy od ω^2 i na równiku jest ok. 300 razy mniejsza niż siła ciężkości).
Proszę prześledzić poniższe wskazówki i dokonać końcowych obliczeń.
Przyjmiemy układ współrzędnych na szerokości geograficznej φ: z − oś pionowa, x - równoleżnikowo na wschód, y− południkowo na północ (rys.).
Ruch odbywa się bez prędkości początkowej, $\vec{v}_o = (0, 0, 0)$, przy położeniu początkowym $\vec{r}_o = (0, 0, z_o)$. Prędkość kątowa obrotu Ziemi: $\vec{\omega} = (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$, położenie i prędkość w chwili t: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, siła grawitacji: $\vec{F} = m\vec{g} = m(0, 0, -g)$.



• Równanie ruchu wygląda następująco: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$.
(1) pokaż, że to równanie ruchu sprowadza się do układu
$\dot{v}_x = 2\omega(\sin\varphi\, v_y - \cos\varphi\, v_z)$
$\dot{v}_y = -2\omega\sin\varphi\, v_x$
$\dot{v}_z = -g + 2\omega\cos\varphi\, v_x$
(2) scałkuj po czasie w/w w zakresie 0 do t, powinieneś otrzymać:
$v_x = 2\omega(\sin\varphi\, y - \cos\varphi\,(z - z_o))$
$v_y = -2\omega\sin\varphi\, x$
$v_z = -gt + 2\omega\cos\varphi\, x$
(3) wstaw w/w do wyjściowego układu i posługując się warunkiem $\omega^2 << \omega$ zaniedbaj wszystkie człony zawierające ω^2; układ równań upraszcza się:
$\dot{v}_x = 2\omega\cos\varphi\, gt$
$\dot{v}_y = 0$
$\dot{v}_z = -g$
(4) scałkuj po czasie dwukrotnie aby uzyskać szukane położenia spadającego ciała w funkcji czasu $x)t), y(t), z(t)$
(5) oblicz odchylenie od pionu x w momencie upadku na Ziemię, jeśli ciało spada z wysokości 10 km, przyjmij szerokość geograficzną φ dla Krakowa, podaj zwrot tego odchylenia.