

- składanie drgań; • drgania harmoniczne tłumione i wymuszone;

- Jakim torem porusza się cząstka o masie m , jeśli w kierunkach prostopadłych x, y odbywają się niezależne drgania harmoniczne określone następująco:
 - $x(t) = A \sin \omega t, y(t) = B \sin \omega t,$
 - $x(t) = A \sin \omega t, y(t) = B \cos \omega t.$
 Jaka jest w obu przypadkach całkowita energia poruszającej się cząstki?
- Ruch drgający tłumiony. Ruch drgający masy m (np. przyczepionej do sprężyny) odbywa się w ośrodku, w którym występuje siła oporu (np. opór powietrza) proporcjonalna do do prędkości drgającej masy, $F_t = bv$. Wielkość $\frac{b}{2m} = \beta$ nazwiemy współczynnikiem oporu. Uzasadnij równanie opisujące ten ruch:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dx(t)}{dt} + \omega_o^2 x(t) = 0,$$
 gdzie ω_o jest częstością drgań własnych, czyli częstością kołową drgań gdyby nie było tłumienia.
- Znajdź rozwiązanie równania drgań tłumionych (przedstawionego wyżej).
Odpowiedź: $x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} t + \varphi)$.
Wskaz: patrz np. abc... równania_różniczkowe.pdf, rozdz. 2.3.2
- Po upływie czasu $t = 15$ s amplituda drgań kamertonu zmniejszyła się 100 razy. Znaleźć współczynnik tłumienia drgań $\beta = b/2m$.
- Rozpatrz obwód elektryczny rozpatrywany na poprzednich zajęciach, który zawiera oprócz kondensatora i cewki opór R połączony z nimi szeregowo. Zapisz równanie opisujące zmiany ładunku $q(t)$ na okładkach kondensatora uwzględniając istnienie oporu elektrycznego, pokaż że jest to równanie harmoniczne z tłumieniem, podaj jego rozwiązanie $q(t)$. Jaki wzór opisuje okres oscylacji ładunku?
Wskaz.: Spadek napięcia na oporniku opisuje prawo Ohma $U_R = iR$
- Ruch harmoniczny tłumiony z wymuszeniem. Ułożyć równanie drgań harmonicznych (np. sprężyna, wahadło) z uwzględnieniem tłumienia i zakładając, że obecna jest siła wymuszająca, zmieniająca się sinusoidalnie, $F = F_o \cos \omega t$.
- Prześledź rozwiązanie równania drgań wymuszonych opisane w abc... równania_różniczkowe.pdf, rozdz. 2.3.3 i uzyskaj:
 $x(t) = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$, gdzie $f_o = F_o/m$, $\tan \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$.
Znajdź częstość siły wymuszającej, ω_{rez} , przy której wystąpi rezonans.
- Znaleźć amplitudę drgań wymuszonych ciężarka o masie 0.2 kg, zawieszony na lekkiej sprężynie o współczynniku sprężystości 10 N/m, jeśli sinusoidalna siła wymuszająca ma amplitudę 2 N i częstość dwa razy większą od częstości drgań własnych ciężarka, a współczynnik tłumienia jest równy 0.5 1/s. Ilokrotnie obliczona amplituda jest mniejsza od amplitudy uzyskiwanej dla częstości rezonansowej?
- Pokaż, że zmiana w czasie t energii całkowitej $E = E_p + E_k$ drgań tłumionych wyraża się, w przypadku gdy tłumienie jest b. małe ($\beta \ll \omega_o, \omega \approx \omega_o$), wzorem $E(t) = E_o e^{-2\beta t}$, gdzie $E_o = \frac{1}{2} A^2 m \omega_o^2$.
Wskaz.: dla małego tłumienia czynnik $e^{-\beta t}$ może być uważny za stały w czasie, cała lokalna zmienność $x(t)$ pochodzi praktycznie od zmienności czynnika $\sin \omega t$.
- Kulka o masie $m = 100$ g zawieszona na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości $k_1 = 0.1$ N/m wykonuje drgania w ośrodku o współczynniku tłumienia $\beta = 0.01$ 1/s. Jaką sprężynę (o jakim współczynniku sprężystości k_2) i jak (szeregowo, równolegle?) należy dołączyć aby drgania nie mogły zachodzić w danym ośrodku?
Wskaz.: pamiętaj o warunku, przy którym rozwiązanie równania ruchu ma charakter oscylacyjny ($\omega_o > \beta$).
- Przyjmij wartość częstości drgań własnych $\omega_o = 10$, amplitudę natężenia siły wymuszającej $f_o = 100$. Rozpatrz drgania wymuszone w ośrodkach o współczynniku tłumienia: a) $\beta = 0.1$, b) $\beta = 1$. Wszystkie wielkości podane wyżej są wyrażone w jednostkach układu SI.

Dla obu przypadków wykonaj obliczenia numeryczne amplitudy drgań wymuszonych $A(\omega)$ w przedziale $(0, 5\omega_o)$ (w kilkudziesięciu punktach, zagęść w okolicy ω_{rez}) i narysuj możliwie dokładne wykresy $A(\omega)$ (są to tzw. krzywe rezonansowe). **To zadanie proszę zapisać i oddać na ćwiczeniach.**

12. Do sprężyny o stałej sprężystości $k = 204.7$ N/m i zaniedbywalnej masie zawieszona jest masa $m = 0.404$ kg, tak że po rozciągnięciu sprężyny pozostaje ona w spoczynku. Do drugiego końca sprężyny (od góry) przyczepiony jest tłok, który od pewnego momentu wykonuje ruch do góry i do dołu z siłą $F = 29.4 \cos \omega t$ N (gdzie $\omega = 17.1$ Hz). Jakie jest maksymalne wychylenie z położenia równowagi zawieszanej masy. Jaka jest maksymalna prędkość jaką osiąga ta masa? (Przyjąć, że tłumienie jest zaniedbywalnie małe.)